Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

DIVERGENCIA - TEOREMA DE GAUSS

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

DIVERGENCIA

Antes de abordar el teorema de Gauss introduciremos otra operación que, como el rotacional, actúa sobre campos vectoriales pero, a diferencia de este, resulta en una función escalar...

Definición (divergencia de un campo vectorial)

Si $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ *es un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ *y* $\partial R/\partial z$ *existen sobre una región abierta* D*, la* **divergencia** *de* $\mathbf{F}$ *es la función escalar (real) de tres variables definida sobre* D *como*

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

La razón del nombre "divergencia" radica en su aplicación al flujo de fluídos. En efecto, si $\mathbf{F}(x,y,z)$ describe la velocidad de un fluído (o gas), entonces $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z)$ representa la **razón de cambio neta** (con respecto al tiempo) de la masa del fluído que fluye desde el punto $(x,y.z)$ (por unidad de volumen).

Para memorizar esta fórmula también es útil pensar al operador diferencial vectorial "nabla" (operador gradiente) como un vector, lo que permite expresar $\operatorname{div} \mathbf{F}$ como un producto escalar formal entre ∇ y $\mathbf{F}$. En efecto:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \operatorname{div} \mathbf{F}$$

Por lo tanto, resulta válida la expresión simbólica

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

Ejercicio: Mostrar que si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$. **Ayuda:** Teorema 11, p.1095.

Un nuevo operador diferencial surge de la **divergencia de un campo gradiente**. En efecto: Si f es una función escalar de tres variables,

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

y, dado que esta última expresión se presenta con mucha frecuencia, se estila representarla mediante la notación abreviada $\nabla^2 f$. A $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ se le llama **operador de Laplace** debido a su relación con la conocida **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

También se puede aplicar el operador de Laplace a un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ en términos de sus funciones componentes:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k} =$$
$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)$$

TEOREMA DE GAUSS

Otra posibilidad que surge de aplicar la divergencia, ahora a un campo vectorial bidimensional, es la de expresar la fórmula establecida en el **teorema de Green** en una **"versión vectorial"**:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\,(x, y) \; dA$$

donde D es una región en el plano xy y C es su curva frontera. **Ejercicio:** Demostrarlo! **Ayuda:** Ver p.1096.

Luego, se podría conjeturar una versión tridimensional de dicha expresión:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,(x, y, z) \; dV$$

donde E es una región sólida en el espacio y S es su superficie frontera.

El **teorema de Gauss** (o **teorema de la divergencia**) establece que, bajo hipótesis adecuadas, la conjetura anterior es válida. Entonces...

El teorema de Gauss relaciona una integral de la "derivada de una función vectorial" sobre cierta región (en el espacio tridimensional) con una integral de la función (vectorial) original sobre la frontera de dicha región.

En este sentido, guarda una clara similaridad con el **teorema de Stokes**, con el **teorema de Green** y con el **teorema fundamental del cálculo**.

Teorema (**de Gauss**)

Sean E una región sólida simple y S la superficie frontera de E considerada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial tridimensional cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a E. Entonces:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,(x, y, z)\; dV$$

Nota: Se dice que una **región sólida** es **simple** cuando es simultáneamente de los tipos 1, 2 y 3 (*por ejemplo, regiones acotadas por elipsoides o por cajas rectangulares*).

Demostración: Se omite en este curso. No obstante, para el caso en que E es simple, está al alcance del mismo y se puede encontrar en las páginas 1129-1130 del libro de *Stewart*.

En el contexto del flujo de fluídos, el teorema de la divergencia (de Gauss) plantea que, bajo las condiciones dadas, el flijo de **F** en el límite de la superficie es igual a la integral triple de la *divergencia* de **F** sobre el sólido acotado por ella.

Ejemplo 1 [p.1131]**:** Determinar el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: En este caso, tenemos las funciones componentes

$$P(x, y, z) = z \qquad Q(x, y, z) = y \qquad R(x, y, z) = x$$

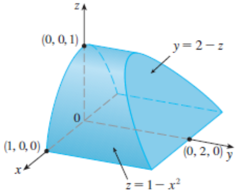
Luego

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 0 + 1 + 0 = 1$$

Por otra parte (para determinar los conjuntos sobre los que se ha de integrar) podemos tener en cuenta que la *esfera unitaria*, a la que denotaremos por S, es la frontera de la *bola unitaria* B definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. y aplicar el teorema de Gauss para obtener el flujo requerido mediante una integral triple muy sencilla... En efecto:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \; dV \\ &= \iiint_B 1 \; dV = Vol(B) = \frac{4}{3}\pi 1^3 = \frac{4}{3}\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2 [p.1131]**:** Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(xy)\mathbf{k}$ y S es la superficie de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.



Solución: Sería extremadamente difícil evaluar la integral de superficie en forma directa (pues habría que evaluar cuatro integrales de superficie correspondientes a las cuatro partes de S). Además, en este caso, la divergencia de $\mathbf{F}$ es mucho menos complicada que $\mathbf{F}$... En efecto:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy) = y + 2y = 3y$$

Por tanto, usamos el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie dada en una integral triple. La manera más fácil de evaluar la integral triple, es expresar E como una región tipo 3:

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\right\}$$

Entonces tenemos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\, dV$$

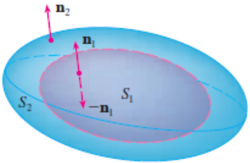
$$= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\, dy\, dz\, dx = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\, dz\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right] dx$$

$$= -\int_0^1 (x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = \frac{184}{35}$$

Hasta aquí, se ha enunciado y ejemplificado el teorema de la divergencia sólo para regiones sólidas simples, pero se puede demostrar también para regiones que son uniones finitas de esta clase de regiones. A modo ilustrativo, consideramos la siguiente versión...

Propiedad: Si E es una región sólida que se ubica entre dos superficies "cerradas", S_1 y S_2, tales que S_1 queda completamente contenida en el interior de S_2 (*ver figura*), con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ (hacia afuera) respectivamente,



entonces (bajo las hipótesis supuestas en el teorema de Gauss),

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\ dV = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Sugerencia: Leer el EJEMPLO 3 de la p.1132.