Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

TEOREMA DE GREEN

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

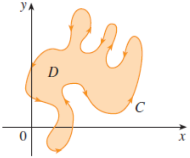
Autor:

James Stewart

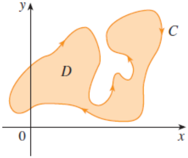
Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

A grandes rasgos, el Teorema de Green establece una relación entre una integral de línea a lo largo de una curva plana, simple y cerrada, y una integral doble sobre la región acotada por esta.

En el planteamiento del Teorema de Green se estila la convención de que la **orientación positiva** de una curva cerrada C es la que corresponde a un recorrido de esta en **sentido antihorario**.



orientación positiva



orientación negativa

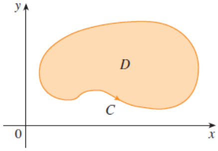
Por lo tanto: si C está defida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $a \leq t \leq b$, la región D encerrada por C queda siempre a la izquierda del punto $\mathbf{r}(t)$ mientras este recorre C variando desde $t = a$ hasta $t = b$.

Además de proveer una interesante herramienta teórica, este teorema tiene una gran utilidad práctica para simplificar, en muchos casos, la evaluación de las integrales involucradas en un problema...

Teorema (de Green)

Sea C una curva en el plano, simple, cerrada, suave por tramos y con orientación positiva.

Sea D la región (plana) delimitada por C.



Si P y Q son funciones escalares (reales) de las variables x e y, con primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Notación: Con frecuencia, suele expresarse a la curva C referida en el Teorema de Green de tal manera que no se pierda de vista su relación con la región D... En estos casos, se escribe ∂D (*frontera de* D) y esta notación lleva implícita también la orientación positiva de dicha curva. Con esto en mente, la ecuación anterior se puede plantear como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$$

Observación: Con la notación anterior resulta más natural considerar al Teorema de Green como una versión del Teorema Fundamental del Cálculo para integrales dobles... En efecto, recordemos la fórmula establecida en el TFC (2da parte):

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Luego, comparemos:

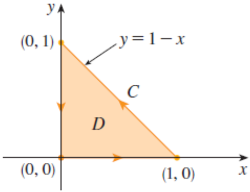
• En ambos casos, en el miembro izquierdo aparece una integral que involucra derivadas.

• En ambos casos, el miembro derecho comprende los valores de las funciones originales sólo en la frontera del dominio de interés.

La **demostración del Teorema de Green** no es sencilla y no se abordará en este curso... No obstante, los estudiantes interesados pueden encontrar una versión (no general) de la misma para el caso en que la región D es tanto de *tipo* I como de *tipo* II (**región simple**) en la pág.1085 del libtro de cabecera del curso (*Stewart*).

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva triangular que consiste de los segmentos rectilíneos de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(0, 0)$.

SOLUCIÓN Aunque la integral de línea dada se podría evaluar como se acostumbra mediante los métodos de la sección 16.2, eso significaría plantear tres integrales separadas a lo largo de los tres lados del triángulo, de modo que en lugar de eso aplicaremos el teorema de Green. Observe que la región D encerrada por C es simple y C sigue una orientación positiva (véase la figura 4). Si hacemos $P(x, y) = x^4$ y $Q(x, y) = xy$, entonces tenemos



$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

No siempre ocurre (como en el ejemplo anterior) que es más fácil evaluar la integral doble que la integral de línea... A veces, resulta conveniente valerse del Teorema de Green en la "dirección inversa"...

Por ejemplo: Supongamos que tenemos la información de que $P(x,y) = Q(x,y) = 0$ sobre C (es decir, P y Q restringidas a la curva C son la función constantemente igual a 0). Entonces, aplicando el T. de Green, podemos resolver casi inmediatamente la integral doble

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \overset{\text{T.Green}}{=} \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C 0\,dx + \int_C 0\,dy = 0$$

sin importar qué valores tomen P y Q (ni sus derivadas parciales) en los puntos de la región D.

Ejercicio: Aplicar el T. de Green para mostrar que el área A de la región D referida en dicho teorema se puede expresar mediante cualquiera de las fórmulas siguientes:

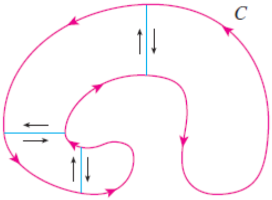
$$\boxed{A(D) = \int_{\partial D} x\,dy} \qquad \boxed{A(D) = -\int_{\partial D} y\,dx} \qquad \boxed{A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx}$$

Sugerencia: Leer el EJEMPLO 3 (pág.1087) y la discusión previa.

Si D_1, D_2, ..., Dn son regiones simples en el plano que no se traslapan dos a dos salvo, posiblemente, en puntos de sus curvas fronteras, entonces:

$$\iint_{D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup Dn} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

donde $C = \partial \left(D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup Dn \right)$.



Observación:

Podría darse o no el caso en que $C = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \ldots \cup \partial Dn$.

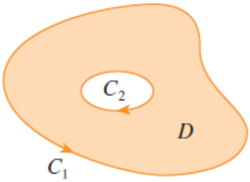
Leer el EJEMPLO 4 de la pág.1088.

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE GREEN

Sean D_1 y D_2 regiones en el plano tales que $D_2 \subseteq D_1$. Entonces, si sus respectivas curvas fronteras, C_1 y C_2, son curvas suaves, simples y cerradas, orientadas C_1 en dirección positiva (*antihoraria*) y C_2 en la dirección opuesta, se cumple que

$$\iint_{D_1 - D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\, dx + Q\, dy$$

donde $C = \partial \left(D_1 - D_2 \right)$.



Leer el EJEMPLO 5 de la pág.1088-89.