Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

INTEGRALES DE LÍNEA
Independencia de la trayectoria en IL

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea a la Física tiene que ver con campos de fuerza...

> Las consideraciones siguientes se realizan en tres dimensiones, pero son completamente análogas para el caso bidimensional.

Supongamos que la fuerza que actúa sobre cada punto (x, y, z) en cierta región del espacio está dada por el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde P, Q y R son funciones continuas (a valores reales). Es decir, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo sobre $\mathbb{R}^3$ que representa una fuerza (como el *campo gravitacional* del EJEMPLO 4 de la sección 16.1, o el *campo de fuerzas eléctricas* del EJEMPLO 5 de la misma sección).

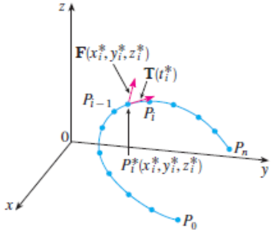
Recordemos...

> El trabajo que efectúa una fuerza constante $\mathbf{F}$ al mover un objeto desde un punto P hasta otro punto Q en el espacio es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es el vector desplazamiento.

Si deseamos calcular el trabajo realizado por esta fuerza al mover una partícula a lo largo de la curva suave C, podemos proceder como sigue:

- Se divide el intervalo $[a, b]$ del parámetro en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\ t_0 = a,\ t_n = b)$ de igual longitud $\Delta t = (b-a)/n$.

Luego, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$:



- Se hace $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ y $z_i = z(t_i)$. Entonces,los puntos correspondientes $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dividen a la curva C en n subarcos de longitudes Δs_1, Δs_2, ... , Δs_n.
- Se elije cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ en el *i-ésimo* subarco. Dicho punto corresponde a un valor t_i^* del parámetro en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Observación: Si Δs_i es pequeño, cuando la partícula se mueve de P_{i-1} a P_i a lo largo de C, sigue aproximadamente la dirección de $\mathbf{T}(t_i^*)$, el vector tangente unitario en P_i^*. $\mathbf{T}(t_i^*)$ es un modo de abreviar $\mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$.

Por lo tanto: El trabajo que efectúa la fuerza $\mathbf{F}$ al mover la partícula desde P_{i-1} hasta P_i es, aproximadamente,

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

y el trabajo total realizado al mover la partícula a lo largo de C es, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)\right] \Delta s_i$$

Resulta intuitivamente evidente que estas aproximaciones mejoran a medida que n se incrementa... Esto motiva la definición del trabajo W realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ como el límite de la suma anterior:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\right] \Delta s_i \\ &= \int_C \left[\mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{T}(x,y,z)\right] ds \overset{\text{notación}}{=} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la curva C está representada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, con $a \leq t \leq b$, el vector unitario tangente es $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(t)/\left|\mathbf{r}'(t)\right|$ y la igualdad anterior se convierte en

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t))\right] \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2 + \left[z'(t)\right]^2}\, dt \\ &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\left|\mathbf{r}'(t)\right|}\right] \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior se debe tener presente que escribir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ y $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t))$ (o $\mathbf{T}(t)$) son tan sólo formas de abreviar

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{y} \quad \mathbf{T}(x(t), y(t), z(t))$$

respectivamente.

Esta integral aparece también en otras áreas o aplicaciones de la física, lo que motiva una definición general para la integral de línea de cualquier campo vectorial continuo...

Definición (integral de línea de un campo vectorial)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene una curva suave* C *con ecuación vectorial* $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. *La* **integral de línea de F a lo largo de** C *es*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Notación (importante): Dado que podemos escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$, es usual denotar la integral de la definición anterior como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

De este modo, la integral de línea del campo vectorial (continuo) $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C es

$$\underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\blacktriangle\text{notación}\blacktriangle} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\ ds}_{\blacktriangle\text{definición}\blacktriangle} = \underbrace{\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt}_{\blacktriangle\text{cálculo}\blacktriangle}$$

Propiedad: A pesar de que (como hemos visto) el valor de las integrales con respecto a la longitud de arco no cambia cuando se invierte la dirección en que "se recorre" la curva C, para la integral anterior se cumple lo siguiente: $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

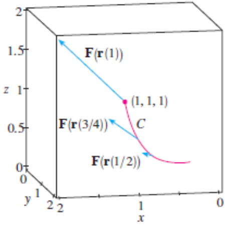
Esto se debe a que el vector tangente unitario $\mathbf{T}$ (en el integrando) es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazada por $-C$.

EJEMPLO [p. 1071]**:** Evaluemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

y C es la "cúbica torcida" con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Vectores representativos que actúan en tres puntos sobre C

Solución: En este caso, una ecuación vectorial para C es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Entonces, tenemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2, t^3) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Luego,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt = \int_0^1 \left[t^3\,(1) + t^5\,(2t) + t^4\,(3t^2)\right]\ dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 + 5t^6\right)\ dt = \left[\frac{t^4}{4} + 5\frac{t^7}{7}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28} \quad \blacksquare$$

Para finalizar, notemos la relación entre las integrales de línea de los campos vectoriales y las integrales de línea de los campos escalares...

Supongamos que el campo vectorial continuo $\mathbf{F}$ sobre $\mathbb{R}^3$ es dado, a través de sus funciones componentes, por la ecuación:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Entonces, su integral de línea a lo largo de una curva C (incluida en su dominio) verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\ dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\ dt + \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\ dt \\
&\qquad + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\ dt \\
&= \int_C P(x, y, z)\,dx + \int_C Q(x, y, z)\,dy + \int_C R(x, y, z)\,dz \\
&= \boxed{\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz}
\end{aligned}$$

EJEMPLO: La integral de línea

$$\int_C (1-y)\,dx + \left(3y+z^2\right)dy + x\,dz$$

se podría expresar como

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

donde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1-y)\,\mathbf{i} + \left(3y+z^2\right)\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$ ■

ATENCIÓN

Hasta AQUÍ, en esta presentación, los temas desarrollados están incluidos en la **sección 16.2** del libro de cabecera del curso (*Stewart*). En lo que resta, se abordan los temas correspondientes a la **sección 16.3** de dicho libro.

Recordemos...

El TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO tiene dos partes:

- La primera establece, bajo hipótesis adecuadas, la resolución de integrales (simples) indefinidas mediante antiderivadas...
- La segunda (Regla de Barrow o Teorema del cambio neto), establece que si F es una función real (de una variable) tal que F' (su derivada ordinaria) es continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

En nuestro curso, se puede decir que existe un resultado que "generaliza" la fórmula anterior si pensamos en el vector ∇f de una función (real) f de dos o tres variables como una especie de "derivada" de f...

A dicha generalización nos dedicaremos en esta clase...

A modo también de recordatorio...

Supongamos que dos variables, x e y, dependen de una tercer variable t (llamada **parámetro**) por medio de las ecuaciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Entonces:

- Cada valor de t determina un punto (x, y) que se puede representar en un plano coordenado.
- Cuando t varía de forma continua, el punto $(x, y) = (x(t), y(t))$ también varía y traza una curva C en dicho plano.

La curva C se llama **curva paramétrica** y las dos ecuaciones que describen las coordenadas de sus puntos, **ecuaciones paramétricas** o **parametrización** de C.

- El **sentido** (u **orientación**) **positivo** sobre C es la dirección en que se mueve un punto al aumentar t.
- Cuando la variación de t se restringe a un intervalo $[a, b]$, podemos decir que $(x(a), y(a))$ es el **punto inicial** de C, y $(x(b), y(b))$ es su **punto final**.

De manera análoga, se pueden definir curvas paramétricas en el espacio, considerando una tercer ecuación $z = z(t)$.

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

En general, el valor de cualquiera de las integrales de línea anteriormente definidas depende de la curva C sobre la cual se integre, aún cuando se compara en curvas que coinciden en sus puntos inicial y final.

No obstante, hay condiciones necesarias y/o suficientes para que esto no suceda, al menos en las integrales de línea de ciertos campos vectoriales.

Definición (trayectoria entre dos puntos)

A una curva suave por tramos (en el plano o en el espacio) con punto inicial A y punto final B se le llama **trayectoria** *de A a B.*

Definición (independencia de la trayectoria)

Se dice que una integral de línea es **independiente de la trayectoria** *en cierta región (del plano o del espacio) cuando su valor es el mismo para todas las trayectorias contenidas en dicha región que coinciden en sus puntos extremos (inicial y final).*

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

El siguiente desarrollo teórico se realiza en dos dimensiones, pero es completamente an análogo para el caso tridimensional.

Observaciones:

Si $f\ (x, y)$ es una función escalar (real):

- $\int_C f\,(x, y)\, ds$ no puede ser independiente de la trayectoria en ninguna región abierta (*pensar en la interpretación geómetrica de esta integral*).
- $\int_C f\,(x, y)\, dx = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}\,(x, y) = f\ (x, y)\,\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$, mientras que $\int_C f\,(x, y)\, dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}\,(x, y) = 0\mathbf{i} + f\ (x, y)\,\mathbf{j}$.

Por lo tanto:

> La teoría sobre independencia de la trayectoria, aunque involucra campos escalares, se refiere fundamentalmente a integrales de línea de campos vectoriales.

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

El siguiente teorema establece que, en condiciones adecuadas, la **integral de línea** del campo vectorial gradiente es precisamente el **cambio neto** en su campo escalar correspondiente, y es, por lo tanto, **independiente de la trayectoria**.

Teorema (T. fundamental de las integrales de línea)

Sea C una curva suave en el plano (o en el espacio) representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, con $a \leq t \leq b$. Sea f una función real (diferenciable) de dos (o de tres) variables tal que el campo vectorial ∇f es continuo sobre C. Entonces:

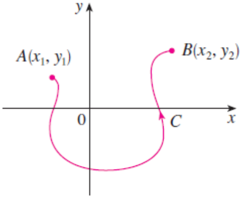
$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Nota: Si bien el teorema anterior se enuncia sólo para el caso de curvas suaves, también es válido para curvas suaves por tramos. **¿Por qué?** Utilizar la formulación dada para justificar dicha versión más general.

Observación importante: En la fórmula establecida en el teorema previo se realiza un "**abuso de notación**", ya que "se evalúa" a f en los vectores $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$, siendo que su dominio es un conjunto de puntos (en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$)... En un sentido matemático riguroso: $f(\mathbf{r}(a))$ y $f(\mathbf{r}(b))$ representan los valores de f en los puntos terminales de los vectores de posición de $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$, respectivamente.

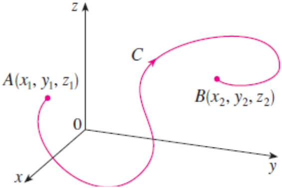
Para el *caso bidimensional* (C es una curva plana), con punto inicial $A(x_1, y_1)$ y punto final $B(x_2, y_2)$, dicha fórmula resulta:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$



Para el *caso tridimensional* (C es una curva en el espacio), con punto inicial $A(x_1, y_1, z_1)$ y punto final $B(x_2, y_2, z_2)$, la fórmula es:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$
$$= f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$



DEMOSTRACIÓN DEL TF de las IL

EJEMPLO 1 Calcule el trabajo que realiza el campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

al mover una partícula de masa m desde el punto (3, 4, 12) hasta el punto (2, 2, 0) a lo largo de la curva C suave por tramos (véase el ejemplo 4 de la sección 16.1).

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 16.1, sabemos que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y, de hecho, $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por tanto, según el teorema 2, el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right) \end{aligned}$$

Para entender mejor los próximos resultados conviene recordar lo siguiente:

- Una curva C en el plano (o en el espacio) es
  - **cerrada**, si su punto inicial coincide con su punto final;
  - **simple**, si no se corta a sí misma en ninguna parte de su "recorrido".

simple, no cerrada   simple, cerrada   no simple, no cerrada   no simple, cerrada

- Una región D en el plano (o en el espacio) es
  - **abierta**, si para todo punto A de D existe un disco (de radio mayor que 0) con centro A completamente contenido en D;
  - **conexa**, si todo par de puntos A y B de D se pueden unir por una trayectoria (curva suave por tramos) completamente contenida en D;
  - **simplemente conexa**, si el interior de toda curva cerrada simple C contenida en D tiene sólo puntos de D (no hay "hoyos" en la región).

simplemente conexa (y conexa)   conexa (no simplemente conexa)   no conexa (ni simplemente conexa)

Ahora, con estas definiciones en mente...

Ejercicio: Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre cierta región D (en el plano o en el espacio). Demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en D. (Ver Teorema 3 de la pág.1077 y la discusión que le precede.)

El Teorema Fundamental de las IL permite establecer inmediatamente la independencia de la trayectoria, en cualquier región abierta y conexa D, de la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ cuando $\mathbf{F} = \nabla f$ ($\mathbf{F}$ es conservativo) y es continuo sobre D. *El siguiente teorema puede considerarse recíproco (o inverso) de este resultado...*

Teorema

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre cierta región abierta y conexa D (en el plano o en el espacio). Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo sobre D, es decir, existe una función escalar f (de dos o de tres variables) tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

DEMOSTRACIÓN en pág.1077-1078.

El siguiente resultado, propone un método para descartar fácilmente que la integral de un campo vectorial bidimensional continuo sea conservativo y, por lo tanto, en una región abierta y conexa, independiente de la trayectoria en ella...

Teorema

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ *un campo vectorial conservativo tal que* P *y* Q *tienen primeras derivadas parciales continuas sobre cierta región (abierta)* D. *Entonces, (necesariamente) para todo punto en* D*:*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

DEMOSTRACIÓN en pág.1078.

V **EJEMPLO 2** Determine si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no lo es.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = x - y$ y $Q(x, y) = x - 2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, $\mathbf{F}$ no es conservativo según el teorema 5.

El inverso de este teorema es válido sólo para una clase especial de regiones y, aunque proporciona un método práctico para comprobar que un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ es conservativo, no especifica la función de potencial...

Teorema

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ *un campo vectorial tal que* P *y* Q *tienen primeras derivadas parciales continuas sobre cierta región (abierta) simplemente conexa* D, *las cuales satisfacen que*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Entonces, (necesariamente) $\mathbf{F}$ *es conservativo.*

DEMOSTRACIÓN: es una consecuencia del Teorema de Green (*que se verá más adelante*).

V **EJEMPLO 3** Determine si el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo o no.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = 3 + 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Asimismo, el dominio de $\mathbf{F}$ es todo el plano ($D = \mathbb{R}^2$), el cual es abierto y simplemente conexo. Por tanto, podemos aplicar el teorema 6 y concluir que $\mathbf{F}$ es conservativo.