Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

INTEGRALES DE LÍNEA

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

A continuación, definiremos una clase de integrales que son similares a las integrales simples, excepto que, en lugar de integrar sobre un intervalo de números reales, se integra sobre una "curva" (o recta), en el plano o en el espacio ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$), generada mientras una/dos variable/s independiente/s (parámetro/s) "recorre/n" cierto/s intervalo/s en $\mathbb{R}$.

Comencemos considerando una **curva plana** C descripta por medio de las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

o, equivalentemente, por la **ecuación vectorial**

$$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Supongamos, además, que C es una **curva "suave"** (o "**regular**").

Recordemos...

Esto significa que:

Las derivadas ordinarias $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas y no se anulan simultáneamente en $[a, b]$.

En notación vectorial:

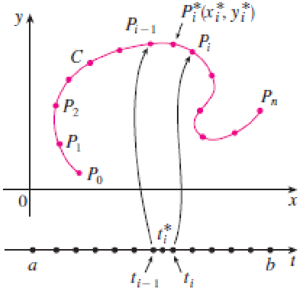
La función vectorial $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ es continua y satisface que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t en $[a, b]$.

INTEGRALES DE LÍNEA DE FUNCIONES ESCALARES

Ahora, consideremos una función real f de dos variables con dominio que incluye a C. Para definir una integral de f sobre C se procede como sigue:

- Se divide el intervalo $[a, b]$ del parámetro en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, ..., n,\ t_0 = a,\ t_n = b)$ de igual longitud $\Delta t = (b - a)/n$.

Luego, para cada $i = 1, 2, ..., n$:



- Se hace $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$. Entonces, los puntos correspondientes $P_i(x_i, y_i)$ dividen a la curva C en n subarcos de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$.
- Se elije cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ en el *i-ésimo* subarco. Dicho punto corresponde a un valor t_i^* del parámetro en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

- Se evalúa f en cada punto P_i^* elegido en el paso anterior y se multiplica dicho valor por la longitud Δs_i del subarco al que pertenece.

Finalmente, se forma la siguiente suma (similar a la *suma de Riemann*):

- Finalmente, se forma la siguiente suma (similar a una *suma de Riemann*):

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

y se toma su *límite* cuando la cantidad n de subintervalos (y subarcos) es cada vez mayor...

Definición (integral de línea de una función de dos variables)

Sea f una función real de dos variables cuyo dominio contiene una curva suave C con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

La **integral de línea** *(o* **integral curvilínea***)* **de** f **a lo largo de** C *(con respecto a la longitud de arco) es*

$$\int_C f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

si este límite existe.

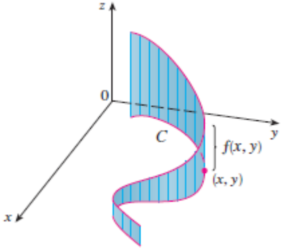
Evaluación de la integral de línea de una función de dos variables:
Se puede demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) que, si f es continua sobre una región (abierta) D que contiene a C, entonces el límite de la definición anterior existe y su valor no depende de la parametrización elegida para representar la curva C. Además, se puede calcular como una integral simple mediante la siguiente fórmula:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$
$$= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt$$

Observación: En el caso especial en que el valor de f es constantemente igual a 1 sobre la curva C, tenemos que

$$\int_C f(x,y)ds = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

da, precisamente, la $\boxed{\text{longitud de } C}$.



Interpretación geométrica de la integral de línea de una función real de dos variables:

Cuando $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en C, la integral $\int_C f(x, y)ds$ da el área de la "cerca" o "cortina" que tiene por *base* a la curva C y cuya *altura* por encima de cada punto de C está dada por su correspondiente valor bajo f.

Otras propiedades:

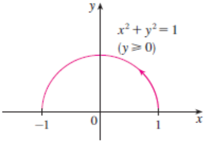
▶ Al ser similares a las integrales simples sobre intervalos y poder, generalmente, evaluarse a través de estas, las integrales de línea satisfacen propiedades algebraicas semejantes a las de aquellas. Por ejemplo: la integral de una suma de dos (o más) funciones es igual a la suma de las integrales de cada función (siempre que existan), la integral del producto de una función por una constante es igual al producto de dicha constante por la integral de la función, etc.

▶ Si $-C$ denota la curva que consiste de los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta, entonces: $\boxed{\int_{-C} f(x, y)ds = \int_C f(x, y)ds}$

EJEMPLO [p.1064]**:** Evaluemos $\int_C (2+x^2y)\, ds$, donde C es la mitad superior de la circunferencia unitaria $x^2+y^2=1$.

Solución: Aquí, el integrando $f(x,y)=2+x^2y$ es una función continua en todo $\mathbb{R}^2$ (pues es un polinomio en dos variables), lo que garantiza la posibilidad de aplicar la fórmula dada anteriormente...

Para aplicar dicha fórmula, lo primero que necesitamos es representar C por medio de ecuaciones paramétricas.



En este caso, podemos escribir:

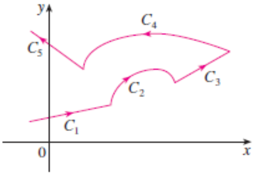
$$\boxed{\begin{array}{c} x=\cos t \qquad y=\operatorname{sen} t \\ 0\le t\le \pi \end{array}}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\int_C (2+x^2y)\, ds &= \int_0^{\pi} f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt \\
&= \int_0^{\pi} [2+(\cos t)^2 \operatorname{sen} t]\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2+(\cos t)^2}dt \\
&= \int_0^{\pi} (2+\cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}dt \\
&= \int_0^{\pi} (2+\cos^2 t \operatorname{sen} t)dt = \left[2t-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = 2\pi+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

No son pocos los casos en que interesa una curva que no es suave, pero que, sin embargo, se puede "descomponer" en una cantidad finita de curvas suaves. Sobre esta clase de curvas es muy sencillo extender la definición de integral de línea...

Se dice que una curva C es **suave por tramos** si es la unión de una cantidad finita de curvas suaves, digamos $C_1, C_2, ..., C_n$, tales que el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i, para $i = 1, 2, ..., n-1$.

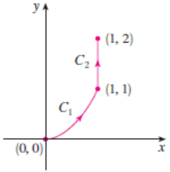


En este caso, la **integral de línea de** $f(x, y)$ **a lo largo de** C se define como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las "partes suaves" de C. Esto es:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + ... + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

siempre que todas las integrales existan.

EJEMPLO [p.1065]**:** Evaluemos $\int_C 2x ds$, donde C es la curva que consiste del arco C_1 de la parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ seguido por el segmento rectilíneo C_2 que va desde $(1,1)$ hasta $(1,2)$.



Solución: Una parametrización para la curva suave C_1 es

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

y, aplicando la fórmula correspondiente, se tiene que

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t\sqrt{1^2 + (2t)^2}dt = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1+4t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

Por otra parte, la curva suave C_2 se puede parametrizar como

$$x = 1 \qquad y = t \qquad 1 \leq t \leq 2$$

y se sigue que

$$\int_{C_2} 2x ds = \int_1^2 2(1)\sqrt{0^2 + 1^2}dt = \int_1^2 2dt = [2t]_1^2 = 2$$

Luego, la integral de $f(x, y) = 2x$ a lo largo de la curva suave por tramos $C = C_1 \cup C_2$ es

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2 \quad \blacksquare$$

Al considerar una función (real) f de dos variables cuyo dominio contiene una curva suave C, se pueden definir otras dos integrales de línea de f a lo largo de C. Estas se obtienen reemplazando Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, o bien, por $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ en la definición de $\int_C f(x,y)ds$.

Definición (otras variantes de integrales de línea)

Sea f una función real de dos variables cuyo dominio contiene una curva suave C con ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

Las **integrales de línea de f a lo largo de C** *"***con respecto a x***" y "***con respecto a y***" son, respectivamente:*

$$\begin{aligned} \int_C f(x,y)dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \\ \int_C f(x,y)dy &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i \end{aligned}$$

si el límite correspondiente existe.

Evaluación de la integral de línea con respecto a x y a y

También en estos casos se puede demostrar que, si f es continua sobre una región (abierta) D que contiene a C, entonces los límites de la definición anterior existen y sus valores son los mismos para todas las parametrizaciones de la curva C (siempre y cuando tengan la misma orientación). Dichos valores se pueden calcular expresando todo en términos de la variable paramétrica t mediante las fórmulas siguientes:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt$$

Ejercicio: Analizar (geométricamente) qué se obtiene de las fórmulas anteriores en el caso especial en que el valor de f es constantemente igual a 1 sobre la curva C.

Propiedades:

- Estas integrales de línea también satisfacen propiedades algebraicas semejantes a las de las integrales simples.
- Si $-C$ denota la curva que consiste de los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta, entonces:

$$\boxed{\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_C f(x,y)dx \quad \text{y} \quad \int_{-C} f(x,y)dy = -\int_C f(x,y)dy}$$

Notación (importante)**:** Frecuentemente, en las aplicaciones, aparecen integrales de línea con respecto a x y a y, combinadas en la forma

$$\int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

Cuando esto ocurre, se estila abreviar la suma anterior escribiendo simplemente:

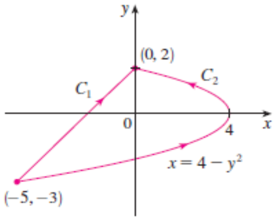
$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

EJEMPLO [p.1067]: Evaluemos

$$\int_C y^2 dx + x dy, \text{ donde:}$$

a) $C = C_1$ es el segmento rectilíneo desde $(-5,-3)$ hasta $(0,2)$.

b) $C = C_2$ es el arco sobre la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5,-3)$ hasta $(0,2)$.



Solución (de a):

a) Una representación paramétrica del segmento rectilíneo es

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Use la ecuación 8 con $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2 \rangle$.) Entonces $dx = 5\,dt$, $dy = 5\,dt$, y con la fórmula 7 se tiene

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t-3)^2(5\,dt) + (5t-5)(5\,dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt$$

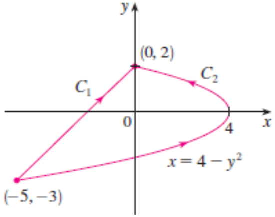
$$= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

EJEMPLO [p.1067]**:** Evaluemos

$$\int_C y^2\,dx + x\,dy, \text{ donde:}$$

a) $C = C_1$ es el segmento rectilíneo desde $(-5,-3)$ hasta $(0,2)$.

b) $C = C_2$ es el arco sobre la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5,-3)$ hasta $(0,2)$.



Solución (de b)**:**

b) Puesto que la parábola está definida como una función de y, tomamos a y como el parámetro y escribimos C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Entonces $dx = -2y\,dy$ y de acuerdo con la fórmula 7 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy &= \int_{-3}^{2} y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy \\ &= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy \\ &= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^{2} = 40\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

Observación: Los valores obtenidos en los incisos a) y b) del ejemplo anterior son diferentes entre sí a pesar de que las curvas C_1 y C_2 tienen los mismos puntos extremos...

En general, el valor de una integral de línea depende no sólo de los puntos extremos de la curva, sino también de la trayectoria.

La teoría desarrollada hasta aquí sobre integrales de línea se puede generalizar de manera completamente análoga para el caso tridimensional:
Las definiciones y propiedades más importantes se pueden encontrar reformuladas y ejemplificadas para este caso en las páginas 1068 y 1069 del libro de cabecera de este curso.

Ejercicio: Leer/estudiar dichas páginas.

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales de línea a la Física tiene que ver con campos de fuerza...

Las consideraciones siguientes se realizan en tres dimensiones, pero son completamente análogas para el caso bidimensional.

Supongamos que la fuerza que actúa sobre cada punto (x, y, z) en cierta región del espacio está dada por el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

donde P, Q y R son funciones continuas (a valores reales). Es decir, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo sobre $\mathbb{R}^3$ que representa una fuerza (como el *campo gravitacional* del EJEMPLO 4 de la sección 16.1, o el *campo de fuerzas eléctricas* del EJEMPLO 5 de la misma sección).

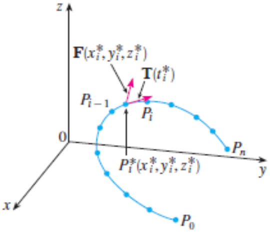
Recordemos...

El trabajo que efectúa una fuerza constante $\mathbf{F}$ al mover un objeto desde un punto P hasta otro punto Q en el espacio es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es el vector desplazamiento.

Si deseamos calcular el trabajo realizado por esta fuerza al mover una partícula a lo largo de la curva suave C, podemos proceder como sigue:

- Se divide el intervalo $[a, b]$ del parámetro en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, ..., n,\ t_0 = a,\ t_n = b)$ de igual longitud $\Delta t = (b - a)/n$.

Luego, para cada $i = 1, 2, ..., n$:



- Se hace $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ y $z_i = z(t_i)$. Entonces,los puntos correspondientes $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dividen a la curva C en n subarcos de longitudes Δs_1, Δs_2, ... , Δs_n.
- Se elije cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ en el *i-ésimo* subarco. Dicho punto corresponde a un valor t_i^* del parámetro en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Observación: Si Δs_i es pequeño, cuando la partícula se mueve de P_{i-1} a P_i a lo largo de C, sigue aproximadamente la dirección de $\mathbf{T}(t_i^*)$, el vector tangente unitario en P_i^*. $\mathbf{T}(t_i^*)$ es un modo de abreviar $\mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$.

Por lo tanto: El trabajo que efectúa la fuerza $\mathbf{F}$ al mover la partícula desde P_{i-1} hasta P_i es, aproximadamente,

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\, \Delta s_i$$

y el trabajo total realizado al mover la partícula a lo largo de C es, aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*) \right] \Delta s_i$$

Resulta intuitivamente evidente que estas aproximaciones mejoran a medida que n se incrementa... Esto motiva la definición del trabajo W realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ como el límite de la suma anterior:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \right] \Delta s_i \\ &= \int_C \left[\mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{T}(x,y,z) \right] ds \overset{\text{notación}}{=} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \; ds \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la curva C está representada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, con $a \leq t \leq b$, el vector unitario tangente es $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(t) / |\mathbf{r}'(t)|$ y la igualdad anterior se convierte en

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}(t)) \right] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \; dt \\ &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \; dt \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior se debe tener presente que escribir $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ y $\mathbf{T}(\mathbf{r}(t))$ (o $\mathbf{T}(t)$) son tan sólo formas de abreviar

$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \quad \text{y} \quad \mathbf{T}(x(t), y(t), z(t))$$

respectivamente.

Esta integral aparece también en otras áreas o aplicaciones de la física, lo que motiva una definición general para la integral de línea de cualquier campo vectorial continuo...

Definición (integral de línea de un campo vectorial)

Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial continuo cuyo dominio contiene una curva suave* C *con ecuación vectorial* $\mathbf{r}(t)$*,* $a \leq t \leq b$*. La* **integral de línea de F a lo largo de** C *es*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Notación (importante): Dado que podemos escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$, es usual denotar la integral de la definición anterior como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

De este modo, la integral de línea del campo vectorial (continuo) $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C es

$$\underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\blacktriangle\text{notación}\blacktriangle} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds}_{\blacktriangle\text{definición}\blacktriangle} = \underbrace{\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt}_{\blacktriangle\text{cálculo}\blacktriangle}$$

Propiedad: A pesar de que (como hemos visto) el valor de las integrales con respecto a la longitud de arco no cambia cuando se invierte la dirección en que "se recorre" la curva C, para la integral anterior se cumple lo siguiente: $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

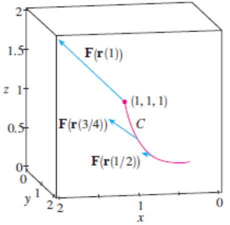
Esto se debe a que el vector tangente unitario $\mathbf{T}$ (en el integrando) es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazada por $-C$.

EJEMPLO [p. 1071]**:** Evaluemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$$

y C es la "cúbica torcida" con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Vectores representativos que actúan en tres puntos sobre C

Solución: En este caso, una ecuación vectorial para C es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Entonces, tenemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2, t^3) = t^3\mathbf{i} + t^5\mathbf{j} + t^4\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Luego,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt = \int_0^1 \left[t^3\,(1) + t^5\,(2t) + t^4\,\left(3t^2\right)\right]\ dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 + 5t^6\right)\ dt = \left[\frac{t^4}{4} + 5\frac{t^7}{7}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}$$

Para finalizar, notemos la relación entre las integrales de línea de los campos vectoriales y las integrales de línea de los campos escalares...

Supongamos que el campo vectorial continuo **F** sobre $\mathbb{R}^3$ es dado, a través de sus funciones componentes, por la ecuación:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

Entonces, su integral de línea a lo largo de una curva C (incluida en su dominio) verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\;dt = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\;dt \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\;dt + \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\;dt \\
&\qquad + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\;dt \\
&= \int_C P(x,y,z)\,dx + \int_C Q(x,y,z)\,dy + \int_C R(x,y,z)\,dz \\
&= \boxed{\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz}
\end{aligned}$$

EJEMPLO: La integral de línea

$$\int_C (1-y)\,dx + \left(3y+z^2\right)dy + x\,dz$$

se podría expresar como

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

donde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1-y)\,\mathbf{i} + \left(3y+z^2\right)\mathbf{j} + x\mathbf{k} \qquad \blacksquare$$