Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

FUNCIONES VECTORIALES: Introducción

Como ya sabemos...

En general, una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto (llamado *dominio*) un elemento de otro conjunto (llamado *rango* o *contradominio*). Los elementos de este último se llaman *valores* (o *imágenes*) de la función.

Hasta aquí...

- En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se estudiaron funciones reales (con valores en $\mathbb{R}$) de una variable independiente (también en $\mathbb{R}$).
- En este curso, se analizaron funciones reales de dos o más variables independientes (también reales).

A continuación...

Consideraremos funciones de una variable independiente que, como antes, representa un número real, pero cuyos valores no son números sino vectores.

Definición (función vectorial)

Una **función vectorial r** *es una regla que asigna a cada número t en cierto subconjunto D de $\mathbb{R}$ un único vector que se denota por $\mathbf{r}(t)$.*

Tal como en el caso de las *funciones reales* (o *escalares*):

- El conjunto D se llama **dominio** de $\mathbf{r}$.
- El vector $\mathbf{r}(t)$ se llama **valor** de $\mathbf{r}$ en t o **imagen** de t bajo $\mathbf{r}$.

  Es usual la letra t para denotar la variable independiente porque esta representa el *tiempo* en la mayoría de las aplicaciones de las funciones vectoriales.

- El conjunto de todos los vectores que son imágenes bajo $\mathbf{r}$ de algún número en su dominio, esto es,

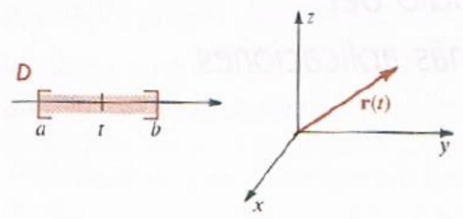
$$\{\mathbf{r}(t) \mid t \in D\}$$

  se llama **rango** o **contradominio** de $\mathbf{r}$.

FUNCIONES VECTORIALES: Definiciones básicas

Entre las funciones de esta clase, las que resultan de interés con mayor frecuencia en las aplicaciones son aquellas cuyas *imágenes* (o *valores*) son vectores *tridimensionales*. Por lo tanto, a continuación, centramos nuestra atención en ellas.

El dominio D se puede representar geométricamente por puntos en una recta real. Por ejemplo:



- En la figura anterior, D es un intervalo cerrado, pero en general, D podría ser cualquier otro tipo de conjunto de números reales.
- En la misma figura se representa también el vector de posición de $\mathbf{r}(t)$ en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

Observaciones (demostración del teorema siguiente)**:**

- Como cada t en el dominio D de $\mathbf{r}$ tiene asignado uno y solo uno de los vectores en su contradominio, las componentes de dicho vector están determinadas de manera única por t y son, por lo tanto, funciones escalares (en nuestro contexto, funciones reales) de t. Entonces, si se denotan estas funciones por f, g y h, se puede escribir:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \quad \text{o bien,} \quad \mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}.$$

- Inversamente, si f, g y h son funciones escalares con dominios D_f, D_g y D_h respectivamente, tales que $\emptyset \neq D_f \cap D_g \cap D_h = D$, entonces, para cada t en D, se puede definir un vector único $\mathbf{r}(t)$ mediante las ecuaciones anteriores.

Teorema

Si D es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, entoces $\mathbf{r}$ es una función vectorial con dominio D si y sólo si existen funciones escalares f, g y h , con dominios D_f, D_g y D_h respectivamente, tales que $D_f \cap D_g \cap D_h = D$ y

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

para todo t en D.

FUNCIONES VECTORIALES: Definiciones básicas

Las funciones f, g y h del teorema anterior son llamadas **funciones componentes** de $\mathbf{r}$.

EJEMPLO [p. 840 (1)]**:** Sea

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t} \right\rangle$$

Entonces, las **funciones componentes** de $\mathbf{r}$ son

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3-t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

y sus respectivos dominios son

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ D_g &= \{t \in \mathbb{R} \mid 3 - t > 0\} = (-\infty, 3) \\ D_h &= \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} = [0, +\infty) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **dominio** de la función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$D = \mathbb{R} \cap (-\infty, 3) \cap [0, +\infty) = \boxed{[0, 3)}$$

El límite de una función vectorial puede definirse a través de los límites de sus funciones escalares componentes...

Definición (límite de una función vectorial)

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ *una función vectorial cuyo dominio* D *contiene puntos arbitrariamente cercanos al número real* a*. Entonces*

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

siempre que exista el límite cuando $t \longrightarrow a$ *de cada función componente.*

También se puede utilizar para este límite una definición tipo ε-δ...

EJERCICIO (sólo matemáticos): Probar que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

si $t \in D$ y $0 < |t - a| < \delta$ entonces $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$

Geométricamente: Las definiciones anteriores establecen que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ es igual a $\mathbf{b}$ si y sólo si la *longitud* y *dirección* del vector $\mathbf{r}(t)$ se aproximan a la longitud y dirección del vector $\mathbf{b}$ cuando la variable t tiende al número real a.

EJEMPLO [p. 840 (2)]**:** Determinar el límite cuando t tiende a 0 de

$$\mathbf{r}(t) = \left(1 + t^3\right)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \frac{\text{sen } t}{t}\mathbf{k}$$

Solución: Según la definición de límite de una función vectorial, el límite de $\mathbf{r}$ es el vector cuyas componentes son los límites de sus funciones componentes (en caso de que todos ellos existan). Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t\to 0}\left(1 + t^3\right)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen } t}{t}\right]\mathbf{k} \\
&= \left(1 + 0^3\right)\mathbf{i} + \frac{0}{e^0}\mathbf{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1}\right]\mathbf{k} \\
&= (1)\,\mathbf{i} + \left(\frac{0}{1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{1}\right)\mathbf{k} \\
&= \boxed{\mathbf{i} + \mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Nota: Los primeros dos límites se pueden calcular por *reemplazo directo* del valor numérico de interés ($t = 0$); en cambio, para la última componente, se obtiene una indeterminación del tipo $0/0$, por lo tanto, se aplica antes la *regla de L´Hôpital* estudiada para funciones reales de una variable.

Definición (**continuidad de funciones vectoriales**)

Una función vectorial **r** *es continua en un punto a de su dominio si*

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Observación: La función vectorial del ejemplo anterior $\boxed{\text{no}}$ es continua en 0. En efecto, aunque existe $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t) = \langle 1, 0, 1\rangle$, no podemos comparar dicho vector con la imagen bajo **r** de 0, puesto que 0 no es un punto en el dominio de **r** (la última componente de **r** no está definida en 0).

Otro ejemplo: La función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t\rangle$ $\boxed{\text{sí}}$ es continua en 0. En efecto,

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to 0}(1+t), \lim_{t\to 0}(2+5t), \lim_{t\to 0}(-1+6t) \right\rangle = \langle 1, 2, -1\rangle$$
$$= \mathbf{r}(0)$$

EJERCICIO (todas las carreras): Probar que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ es continua en a si y sólo si sus componentes lo son.

Observación: La función vectorial del ejemplo anterior es continua no sólo en 0, sino en todos los puntos de $\mathbb{R}$, ya que todas sus funciones componentes lo son (pues son polinomios).