CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.9 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Compruebe que el teorema de la divergencia es válido para el campo vectorial **F** y la región E dados

$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,

E es el sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

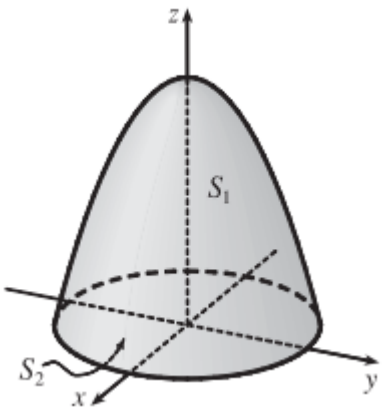
El Teorema de la Divergencia relaciona una integral de superficie con una integral triple de la divergencia del campo dado.

Teorema de la divergencia Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea **F** un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Para comprobarlo con el campo y el sólido dado resolveremos por separado cada integral.

Haremos primero la integral triple, usaremos coordenadas cilíndricas:



La región E se muestra en la figura. Sobre el plano xy tenemos un círculo de radio 2, $x^2 + y^2 = 4$, de aquí obtenemos:

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$.

Al observar z, vemos que este varía entre el plano xy y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que, en coordenadas cilíndricas es $z = 4 - r^2$, por lo tanto $0 \leq z \leq 4 - r^2$.

Por otro lado, trabajando como en la sección 16.5 obtenemos $div\mathbf{F} = 3x + 1$.

Entonces:

$$\iiint_E div\mathbf{F}\, dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} [3\,(rcos\theta) + 1]\; r\, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} [3\,(rcos\theta) + 1] r\,(4 - r^2) d\theta dr$$

$$= \int_0^2 r(4 - r^2)(3rsen\theta + \theta)|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^2 4r - r^3 dr = 8\pi$$

Ahora, resolveremos la integral de superficie del campo vectorial dado como lo hicimos en la sección 16.7:

Vamos a dividir la superficie en dos:

- S_1 será el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$, el cual está dado como una función de x e y, y por lo tanto, podemos tomar a estas variables como parámetros. Entones:

$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\,\mathbf{k}$ con $x^2 + y^2 \leq 4$

$\mathbf{r}_x(x, y) = 1\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 2x\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_y(x, y) = 0\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

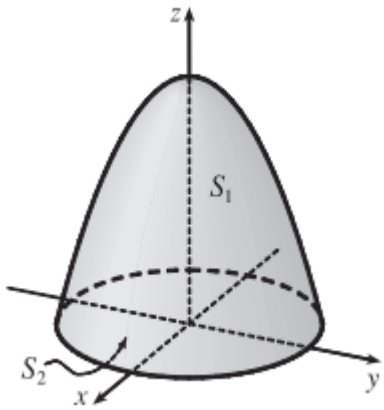
$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(x, y)\big) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Aplicando la definición 9 de la pág. 1117 tenemos:

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\, dA = \iint_D 2x^3 + 2xy^2 + 4 - x^2 - y^2\, dA$$

$$= \iint_D 2x(x^2 + y^2) + 4 - (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^3 cos\theta + 4 - r^2)\, r\, dr d\theta = 8\pi$$

- S_2 será el círculo de radio 2 sobre el plano xy. Parametrizándolo y procediendo como antes, tenemos:



$\mathbf{r}(r, \theta) = rcos\theta\,\mathbf{i} + rsen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$ con $0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\mathbf{r}_r(r, \theta) = cos\theta\,\mathbf{i} + sen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_\theta(r, \theta) = -rsen\theta\,\mathbf{i} + rcos\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}$

$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(r, \theta)\big) = (rcos\theta)^2\,\mathbf{i} + r^2 cos\theta sen\theta\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(r, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

Luego,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 8\pi$$