CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.8 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \mathbf{rotF} \cdot d\boldsymbol{S}$ donde

$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2z^2\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$ y S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ orientada hacia arriba

El Teorema de Stokes (pág. 1122) nos relaciona una integral de superficie sobre una superficie S, como la que nos están pidiendo, con una integral de línea alrededor de la curva frontera de S (una curva en el espacio).

Teorema de Stokes Sea S una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Determinemos entonces quién es esa curva frontera:

Si observamos ambas superficies $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 4$, estas se intersecan en el círculo $x^2 + y^2 = 4$, a la altura de $z = 4$. Parametrizando dicha curva obtenemos la forma vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2cost\,\mathbf{i} + 2sent\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

y

$$\mathbf{r}'(t) = -2sent\,\mathbf{i} + 2cost\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Por otro lado, $\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) = 4(cost)^2 16\,\mathbf{i} + 4(sent)^2 16\,\mathbf{j} + (2cost)(2sent)4\,\mathbf{k}$

$$= 64(cost)^2\,\mathbf{i} + 64(sent)^2\,\mathbf{j} + 16\,cost\,sent\,\mathbf{k}$$

Aplicando el Teorema de Stokes, tenemos

$$\iint_S \mathbf{rotF} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_C \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle 64(cost)^2\,, 64(sent)^2\,, 16\,cost\,sent\rangle \cdot \langle -2sent\,, 2cost\,, 0\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} -128(cost)^2 sent + 128\,(sent)^2\,cost\,dt = 0$$

Ejercicio: Utilice el Teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Considerar la curva C orientada en sentido positivo (anti horario)

$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$, C es el triángulo con vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Para aplicar el Teorema de Stokes, debemos calcular el rotacional de F, como lo hicimos en el parágrafo 16.5. Así obtendremos que $\mathbf{rot\,F} = -2z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$.

La superficie S encerrada por la curva C es la porción del plano $x + y + z = 1$ sobre la región triangular $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. La orientación de S es había arriba debido a que la curva está orientada en sentido positivo.

Para resolver la correspondiente integral de superficie podemos, en lugar de recurrir a la ecuación 9 de la pág. 1117, hacerlo a través de la ecuación 10 de la pág. 1118 ya que a S la podemos ver como la gráfica de una función $z = g(x, y) = 1 - x - y$ y considerar a x y a y como parámetros.

Entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot\,F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA = \iint_D (2z(-1) + 2x(-1) - 2y)dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} -2\ dy\,dx = -1$$