CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.7 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Evaluar la integral de superficie $\iint_S (x+y+z)\, dS$ donde S es el paralelogramo cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \\ z = 1+2u+v \end{cases}$ $\quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 1$

Tenemos que calcular una integral de superficie de un campo escalar, sobre una superficie que está dada de forma paramétrica. Aplicaremos la definición 2 de la pág. 1111 para lo cual debemos identificar $\mathbf{r}(u,v), \mathbf{r}_u(u,v)$, $\mathbf{r}_v(u,v)$.

Tenemos: $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j} + (1+2u+v)\mathbf{k}$.

De aquí: $\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_v = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Luego $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$ y de aquí $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$.

Por otro lado, $f\big(\mathbf{r}(u,v)\big) = (u+v) + (u-v) + (1+2u+v) = 4u + v + 1$

Entonces, recurriendo a la definición dicha, tenemos:

$$\iint_S (x+y+z)\, dS = \int_0^2 \int_0^1 (4u+v+1)\sqrt{14}\, dv\, du = 11\sqrt{14}$$

Ejercicio: Evaluar la integral de superficie $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\, dS$ donde S es la parte del cilindro $x^2+y^2=9$ entre los planos $z=0$ y $z=2$, junto con sus discos de arriba y de abajo.

Dividiremos a la superficie S es tres y parametrizaremos cada una de ellas para poder aplicar la definición 2 de la pág. 1111.

- Consideremos S_1 la superficie lateral del cilindro, entre $z=0$ y $z=2$.

Parametrizando esta obtenemos: $\mathbf{r}(\theta,z) = 3cos\theta\ \mathbf{i} + 3sen\theta\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$ con $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le 2$

También $\mathbf{r}_\theta = -3\ sen\theta\ \mathbf{i} + 3\ cos\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_z = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 1\ \mathbf{k}$,de donde $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = 3\ cos\theta\ \mathbf{i} + 3\ sen\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ y de aquí $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = 3$

Por otro lado, el integrando es $f\big(\mathbf{r}(\theta,z)\big) = 9 + z^2$.

Entonces: $\iint_{S_1} (x^2+y^2+z^2)\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9+z^2)3\, dz\, d\theta = 124\pi$

- Consideremos S_2 la tapa superior del cilindro.

Tendremos entonces $\mathbf{r}(\theta,r) = rcos\theta\ \mathbf{i} + rsen\theta\ \mathbf{j} + 2\ \mathbf{k}$ con $0 \le \theta \le 2\pi$ y $0 \le r \le 3$.

También $\mathbf{r}_\theta = -r\ sen\theta\ \mathbf{i} + r\ cos\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_r = cos\theta\ \mathbf{i} + sen\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ de donde $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} - r\ \mathbf{k}$ y de aquí $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r| = r$.

Por otro lado, el integrando es $f\big(\mathbf{r}(\theta, r)\big) = r^2 + 4$

Entonces $\iint_{S_2} (x^2 + y^2 + z^2)\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^2 + 4) r\ dr\ d\theta = \frac{153}{2}\pi$.

- Consideremos S_3 la tapa inferior del cilindro.

Tendremos entonces $\mathbf{r}(\theta, r) = rcos\theta\ \mathbf{i} + rsen\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 3$.

También $\mathbf{r}_\theta = -r\ sen\theta\ \mathbf{i} + r\ cos\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_r = cos\theta\ \mathbf{i} + sen\theta\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k}$ de donde $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} - r\ \mathbf{k}$ y de aquí $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_r| = r$.

Por otro lado, el integrando es $f\big(\mathbf{r}(\theta, r)\big) = r^2 + 4$

Entonces $\iint_{S_3} (x^2 + y^2 + z^2)\ dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (r^2 + 0) r\ dr\ d\theta = \frac{81}{2}\pi$.

Con todo esto, tenemos: $\iint_S\ (x^2 + y^2 + z^2)\ dS = 124\pi + \frac{153}{2}\pi + \frac{81}{2}\pi = 241\pi$

Ejercicio: Evalúe la integral de superficie $\iint_S\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial dado y la superficie orientada S. En otras palabras, calcule el flujo de **F** a través de S.

$\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\mathbf{i} - 3ze^{xy}\ \mathbf{j} + xy\ \mathbf{k}$ y la superficie es el paralelogramo dado en el primer ejemplo, con orientación hacia arriba: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 1 + 2u + v \end{cases}$ $\quad 0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 1$

Del primer ejemplo tenemos:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + (1 + 2u + v)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\ \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$$

Por otro lado

$$\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u, v)\big) = (1 + 2u + v)e^{(u+v)(u-v)}\mathbf{i} - 3(1 + 2u + v)e^{(u+v)(u-v)}\mathbf{j} + (u + v)(u - v)\mathbf{k}$$

Observemos que, la tercer componente de $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es negativa, y como el ejercicio pide orientación positiva, trabajaremos con $-(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$

Aplicando el resultado 9 de la pág. 1117 tenemos:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^2 \int_0^1 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u, v)\big) \cdot \big(-(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\big)\ dA = 4$$