CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.6 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada:

$\mathbf{r}(u,v) = \langle 2\ sen\ u, 3\ cos\ u, v\rangle$ con $0 \leq v \leq 2$

La superficie tiene ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 2\ sen\ u \\ y = 3\cos u \\ z = v \end{cases}$ $\quad 0 \leq v \leq 2$

Para darnos una idea de la superficie, podemos despejar y operar con las dos primeras ecuaciones, así obtendremos $\frac{x}{2} = sen\ u$ y $\frac{y}{3} = cos\ u$.

Elevando al cuadrado ambos miembros de ambas ecuaciones y sumando encontramos

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = (sen\ u)^2 + (\cos u)^2 = 1$, esto es, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, la cuál es la ecuación estándar de una elipse si estuviéramos trabajando en el plano xy. Como estamos trabajando en R^3 y la variable z no aparece, se trata de un cilindro elíptico.

Como z tiene la restricción $0 \leq z \leq 2$ la superficie dada es una porción del cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ con z entre 0 y 2.

Ejercicio: Encuentre una representación paramétrica de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se sitúa arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Tratándose de una esfera de radio 2, podemos recurrir a las coordenadas esféricas vistas anteriormente, obteniendo así una representación paramétrica de la superficie dada:

$\begin{cases} x = 2\ sen\varphi\ cos\theta \\ y = 2\ sen\varphi\ sen\theta \\ z = 2\ cos\varphi \end{cases}$ $\quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Otra parametrización posible, sin recurrir a coordenadas esféricas podría ser la siguiente:

Reemplacemos la ecuación del cono en la esfera: $z^2 + z^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 2z^2 = 4 \quad \rightarrow z^2 = 2$, obtenemos así un círculo de radio $\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 2$. Esto indica que el cono y la esfera se intersecan en dicho círculo.

Considerando como parámetros a x e y tendremos las siguientes ecuaciones paramétricas

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$ $\quad x^2 + y^2 \leq 2$

Nota: No hay una única parametrización para una superficie.

Ejercicio: Hallar el área de la superficie:

La parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre el plano $y = x$ y el cilindro $y = x^2$

Considerando la superficie dada con ecuación $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ recurriremos a la definición 9 de la página 1106. Previamente a ello, calculemos las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \rightarrow \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

El integrando, entonces, nos queda $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$.

Para determinar los límites de la integral miramos en el plano xy, y considerando la región como una región plana de tipo 1, tenemos $0 \leq x \leq 1$ y $x^2 \leq y \leq x$.

Ahora si, el área pedida es: $A(s) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{2}\, dy\, dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$

Ejercicio: Hallar el área de la superficie:

La parte de la superficie $y = 4x + z^2$ que se encuentra entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$, y $z = 1$

Observemos que a esta superficie no la podemos ver como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, por lo que tendremos que parametrizarla para poder aplicar la definición 6 de la pág. 1105.

Parametrizando, entonces, obtenemos:

$$\begin{cases} x = u \\ y = 4u + v^2 \\ z = v \end{cases} \qquad 0 \leq u \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq 1$$

O equivalentemente, $\mathbf{r}(u, v) = u\,\mathbf{i} + (4u + v^2)\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$ con $0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1$

De aquí: $\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_v = 2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}) \times (2v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 4\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{17 + 4v^2}$$

Así, $A(S) = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{17 + 4v^2}\, du\, dv$. Queda para el alumno resolver la integral utilizando alguna tabla de integración.