CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.5 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Determinar el rotacional y la divergencia del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz)\mathbf{i} + (y+xz)\mathbf{j} + (z+xy)\mathbf{k}$

Tenemos $P(x,y,z) = x+yz$, $Q(x,y,z) = y+xz$, $R(x,y,z) = z+xy$

Para calcular el rotacional podemos hacerlo mediante la definición 1 o 2 de la pág. 1091.

$$\mathbf{rot\,F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+yz & y+xz & z+xy \end{vmatrix} = (x-x)\mathbf{i} + (y-x)\mathbf{j} + (z-z)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Para calcular la divergencia de **F** recurriremos a las definiciones 9 y 10 de la pág. 1094.

$$div\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial(x+yz)}{\partial x} + \frac{\partial(y+xz)}{\partial y} + \frac{\partial(z+xy)}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

Observe que $\mathbf{rot\,F}$ da como resultado un vector, y $div\mathbf{F}$ da como resultado un escalar.

Ejercicio: Determinar si el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+yz)\mathbf{i} + (y+xz)\mathbf{j} + (z+xy)\mathbf{k}$ es conservativo o no. Si lo es, determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Observemos que el campo dado está definido en todo R^3 y las funciones componentes tienen derivadas parciales continuas por ser polinómicas. En el ejercicio anterior vimos que $\mathbf{rot\,F} = \mathbf{0}$, entonces, utilizando el teorema 4 de la pág. 1093 concluimos que el campo dado es conservativo. Para hallar la función de potencial f utilizaremos el mismo procedimiento de la sección 16.3.

Ya que $\mathbf{F} = \nabla f$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} f_x(x,y,z) = x+yz & (1) \\ f_y(x,y,z) = y+xz & (2) \\ f_z(x,y,z) = z+xy & (3) \end{cases}$

Integramos la ecuación (1) con respecto a x: $f(x,y,z) = \int x+yz\ dx = \frac{x^2}{2} + xyz + g(y,z)$.

Derivamos la función obtenida con respecto a y, igualamos a la ecuación (2) y obtenemos una expresión para $g(y,z)$:

$$f_y(x,y,z) = xy + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = y+xz \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = y \quad \rightarrow \quad g(y,z) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + h(z)$$

Hasta ahora, nuestra función tiene la forma $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + \frac{y^2}{2} + h(z)$.

Derivamos esta con respecto a z, la igualamos a la ecuación (3) y obtenemos $h(z)$.

$$f_z(x,y,z) = xy + h'(z) = z + xy \quad \rightarrow \quad h'(z) = z \quad \rightarrow \quad h(z) = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + K$$

Reemplazando en nuestra f tenemos que $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + K$ es la función de potencial pedida.