## CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.3 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

**Ejercicio:** Determine si el campo $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y + 2)\mathbf{i} + (x^3 + 4y^3)\mathbf{j}$ es conservativo. Si lo es, encuentre una función de potencial $f$ para $\mathbf{F}$.

Podemos expresar al campo como:

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$$

donde $P(x,y) = 3x^2y + 2$ y $Q(x,y) = x^3 + 4y^3$

Estamos en una región simplemente conexa, ya que el dominio de este campo es todo $R^2$, por lo que podemos aplicar el Teorema 6 de la pág. 1079

Calculemos las derivadas parciales correspondientes: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$. Como vemos, ambas son iguales. Por lo tanto, **F** es conservativo, esto es, existe una función potencial $f$ para **F** tal que $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$.

Hallaremos la función potencial siguiendo la idea de la demostración del Teorema 4:

Para que $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ debe cumplirse que $\begin{cases} 3x^2y + 2 = f_x(x,y) & (1) \\ x^3 + 4y^3 = f_y(x,y) & (2) \end{cases}$

Tomemos la ecuación (1) e integremos con respecto a *x*:

$f_x(x,y) = 3x^2y + 2 \quad \rightarrow \quad f(x,y) = \int 3x^2y + 2\, dx = x^3y + 2x + g(y).$

Esta *g(y)* viene a cumplir el papel de la constante cuando trabajamos con integrales indefinidas, solo que aquí al integrar parcialmente, debemos considerarla como función que depende de la otra variable.

Una vez hecho esto tomamos la función hallada $f(x,y) = x^3y + 2x + g(y)$ y derivamos con respecto a la otra variable, *y*: $f_y(x,y) = x^3 + g'(y)$ y aplicando (2) debe cumplirse que

$$x^3 + 4y^3 = x^3 + g'(y)$$

De aquí $4y^3 = g'(y)$. Para hallar $g(y)$ debemos integrarla respecto de *y*:

$$g(y) = \int 4y^3 dy = y^4 + k.$$

Recopilando todo esto, la función de potencial pedida es $f(x,y) = x^3y + 2x + y^4 + k$.

<u>Aclaración</u>:

- Siempre es conveniente determinar primero si el campo dado es conservativo o no, para luego pasar a buscar la función potencial, antes que empezar directamente a hacer las cuentas. Podemos perder mucho tiempo para llegar a que esta función potencial no existe.
- Da lo mismo empezar por la ecuación (1) que hacerlo por la (2). En ese caso integraremos primero con respecto a *y* y derivaremos luego con respecto a *x*.

- Siempre podemos verificar la función potencial hallada, haciendo las derivadas parciales, éstas deben coincidir con las funciones componentes del campo.

**Ejercicio:** Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y calcule su valor

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x seny\, dx + e^x cosy\, dy$$

Primero debemos demostrar que el campo dado es conservativo y hallar su función potencial. (esto es análogo al ejercicio anterior, por lo tanto, los detalles de las cuentas quedan a cargo del alumno). Al ser conservativo, la integral de línea sólo dependerá de los puntos inicial y final de la curva, es decir es independiente de la trayectoria.

Aplicaremos el Teorema 2 de la pág. 1075.

En nuestro caso tenemos que la función potencial es $f(x,y) = e^x seny + k$ (verificar esto), y

$f\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = e + k$ y $f(0,0) = k$

Por lo tanto:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x seny\, dx + e^x cosy\, dy = f\left(1,\frac{\pi}{2}\right) - f(0,0) = e$$