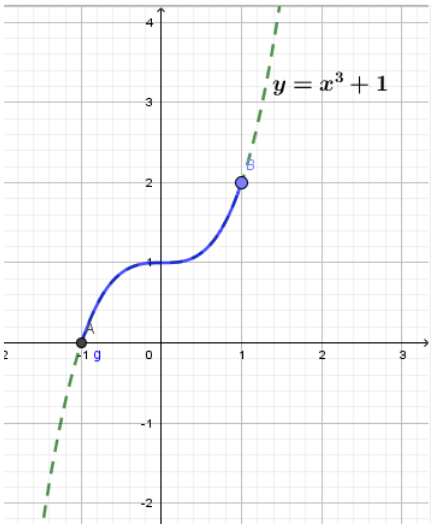
CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 16.2 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos

Ejercicio: Evalúe la integral de línea a lo largo de la curva C dada:

$\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy$, C es la gráfica de $y = x^3 + 1$ entre $(-1, 0)$ y $(1, 2)$

Primero que nada, reconozcamos la curva sobre la que integraremos. Se trata de un tramo de una cúbica, trasladada verticalmente un lugar, que va desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 2)$. A continuación, se presenta su gráfica. Hemos trazado la función con línea punteada y destacado en azul el tramo que nos interesa, a fin de facilitar la comprensión.



Debemos hallar una parametrización de este tramo de curva. Podemos encontrar varias, la más sencilla y directa es

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 + 1 \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$$

No debemos olvidar especificar lo límites del parámetro t, ya que, si no lo hacemos, nos estaremos refiriendo a la curva completa, y no a un tramo de esta, y además estos límites serán los límites de integración.

De esta parametrización obtenemos que $dx = dt$ y $dy = 3t^2 dt$.

Reemplazando todo esto en la integral de línea dada, tenemos:

$$\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy = \int_{-1}^{1} 6\,t^2\,dt + t\,(t^3 + 1)(3t^2)dt = \int_{-1}^{1} 6\,t^2 + t\,(t^3 + 1)(3t^2)\,dt$$

Haciendo las operaciones correspondientes e integrando obtenemos $\int_C 6x^2\,dx + xy\,dy = \frac{34}{7}$.

Ejercicio: La fuerza en un punto (x, y) de un plano coordenado es $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$. Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{F}(x, y)$ a lo largo de la gráfica $y = x^3$ desde (0,0) hasta (2,8).

Recurriendo al último comentario de la pág. 1070 tenemos que $\boldsymbol{W} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$:

$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ es la fuerza, $\mathbf{r}(t) = (t, t^3)$ y $\mathbf{r}'(t) = (1, 3t^2)$ con $0 \le t \le 2$

$$\boldsymbol{W} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^2 \langle t^2 + (t^3)^2, t\,t^3 \rangle \cdot \langle 1, 3t^2 \rangle\,dt = \int_0^2 t^2 + 4t^6\,dt = \frac{1592}{21}$$