CALCULO 2: Ejercicios resueltos

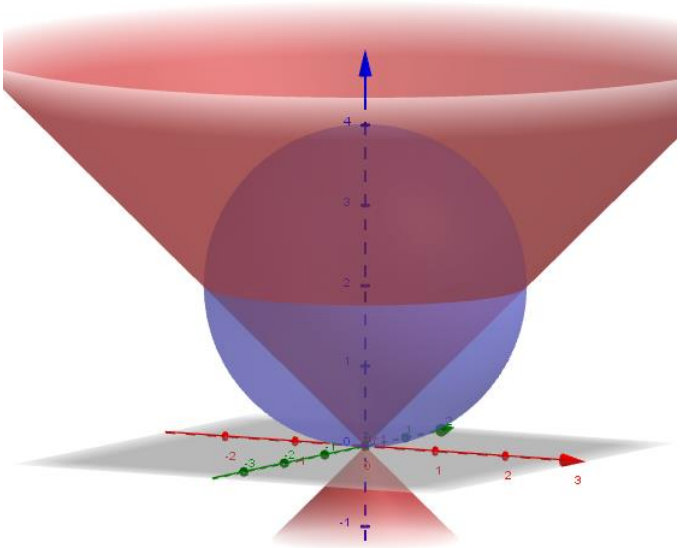
A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 15.9 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

Las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, φ) se relacionan con las rectangulares (x, y, z) de la siguiente forma:

$x = \rho sen\varphi cos\theta$, $y = \rho sen\varphi sen\theta$, $z = \rho cos\varphi$,

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < \pi$

Ejercicio: Calcule el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, en el primer octante. El dibujo se muestra completo pero hay que tener en cuenta que trabajaremos solo en el primer octante



Observemos que la esfera no está centrada en el origen, sino que está desplazada; completando cuadrado encontramos que

$x^2 + y^2 + z^2 = 4z \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ es una esfera con centro en $(0,0,2)$ y radio 2.

Teniendo en cuenta las equivalencias entre coordenadas esféricas y rectangulares, la ecuación de esta esfera en coordenadas esféricas es

$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^2 - 4\rho cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = 4cos\varphi$

El volumen que queremos calcular se encuentra sobre el cono, dentro de la esfera:

- el ángulo φ, que se mide desde el eje z hacia abajo, varía entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ (para entender el porqué de $\frac{\pi}{4}$ vea el ejemplo 4 de la pág. 1036.

- el ángulo θ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ ya que la intersección de ambas superficies es un cuarto de círculo con centro en (0,0) y radio 2. (Igualando ambas ecuaciones se llega a dicho círculo).
- el radio ρ, lo medimos desde el origen de coordenadas, trazando rayos sobre el sólido que nos interesa, su límite siempre es la esfera, pero al no estar ésta centrada en el origen, no podemos decir que varía entre cero y 2 (que es el radio de la esfera), sino que varía entre 0 y la esfera expresada en coordenadas esféricas, esto es $\rho = 4cos\varphi$.
- Estamos calculando el volumen, por lo tanto nuestra función será $f(x, y, z) = 1$.
- Al hacer el cambio de variables no debemos olvidarnos es jacobiano.

Con todo esto, el volumen del sólido pedido es:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4cos\varphi} \rho^2 sen\varphi \, d\rho d\varphi d\theta = 2\pi$$