CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 15.8 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

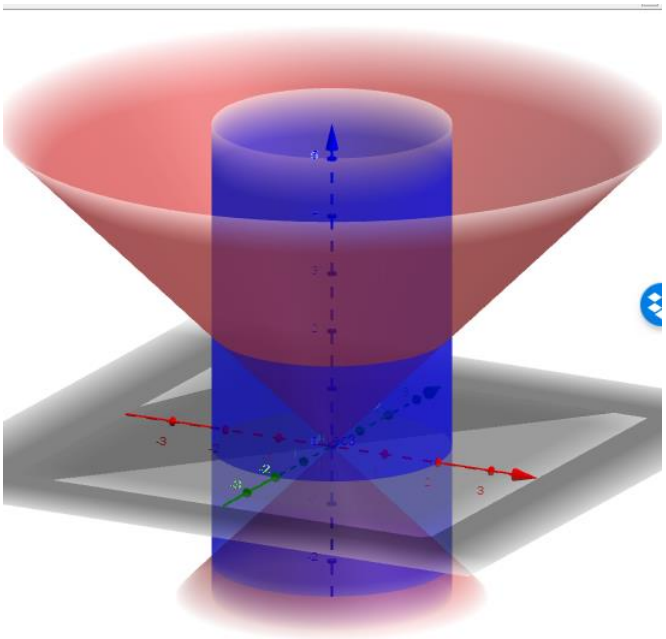
Para trabajar con coordenadas cilíndricas y esféricas, debemos tener a mano la relación entre ellas y las coordenadas rectangulares:

Las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) se relacionan con las rectangulares (x, y, z) de la siguiente forma:

$x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$, $z = z$, con $0 \leq \theta < 2\pi$

$tan\theta = \frac{y}{x}$ $r^2 = x^2 + y^2$.

Ejercicio: Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$, y $z = 0$.



Primero que nada, tratemos de visualizar el sólido en cuestión:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la ecuación de un cono.

$x^2 + y^2 = 4$ es la ecuación de un cilindro circular de radio 2, con centro en el origen.

$z = 0$ es el plano xy.

El sólido es lo que se encuentra sobre el plano xy, debajo del cono y dentro del cilindro.

Si lo quisiéramos plantear en coordenadas rectangulares, tendríamos los siguientes límites:

$0 \leq z \leq cono$, es decir $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

$-2 \leq x \leq 2$ y $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ y la función del integrando sería $f(x, y, z) = 1$ por tratarse de un volumen mediante una integral triple.

Como nos piden calcular el volumen usando coordenadas cilíndricas tendremos los siguientes límites:

$0 \leq z \leq r$ ya que si paso la ecuación del cono a cilíndricas obtengo $z = r$, y además el sólido está sobre el plano xy, es decir $z = 0$; y viendo que la intersección entre el cono y el cilindro es un círculo de radio 2 obtenemos que $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Con todo esto: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^r r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{16}{3}\pi$

Ejercicio: Evaluar la integral cambiando a coordenadas cilíndricas:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dzdxdy$$

Para pasar a coordenadas cilíndricas, debemos poder esbozar la región de integración, o al menos interpretarla e imaginarla.

Estos límites nos indican:

$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\,, \quad -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\,, \quad -2 \leq y \leq 2$

- Miremos los límites de z:

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ (o bien $z^2 = x^2+y^2$) es un cono, que, en coordenadas cilíndricas su ecuación es $z = r$ (Ver ejemplo 2 pág. 1029).

$z = 2$ es un plano.

De aquí tendríamos, en coordenadas cilíndricas que $r \leq z \leq 2$

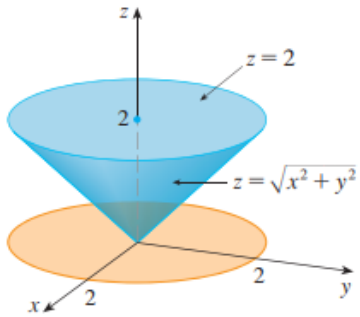


FIGURA 9

- Miremos los límites de x y de y:

igualando tenemos $x = \pm\sqrt{4-y^2}$ o, equivalentemente, $x^2+y^2 = 4$, lo cuál es un círculo de radio 2 en el plano xy.

Pensando en coordenadas cilíndricas, de aquí obtenemos los límites de r y θ:

$0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Por lo tanto, al expresar la integral dada en coordenadas cilíndricas obtenemos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dzdxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r}^{2} (rcos\theta\, z)\, r\, dzdrd\theta$$