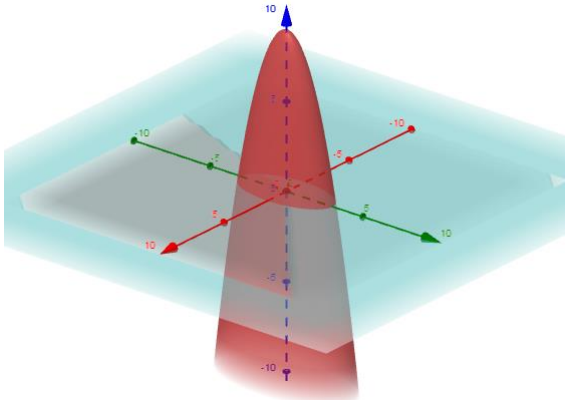
CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación, se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 15.7 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

Ejercicio: Realice la representación de la región E acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y exprese $\iiint_E f(x,y,z)dV$ como seis integrales iterativas diferentes:

$z = 9 - 4x^2 - y^2$, $z = 0$

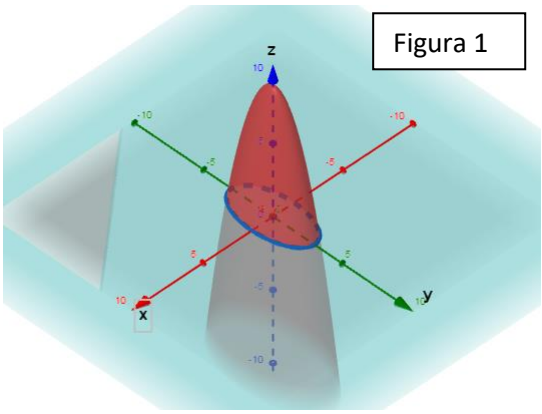
La región E está encerrada por el paraboloide y el plano *xy*, como se muestra en la figura.

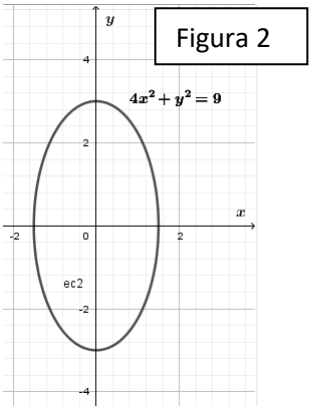


Para hallar las seis integrales iterativas diferentes lo que haremos es ir proyectando esta región sobre los tres planos coordenados (es decir mirándola como región sólida tipo 1, tipo 2 y tipo 3), y en base a esta proyección determinar los límites de integración.

- **Como región sólida tipo 1: proyectamos sobre el plano *xy*:**

Hacemos $z = 0$ y obtenemos la ecuación de una elipse en el dicho plano: $4x^2 + y^2 = 9$, o bien $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{9} = 1$. En la figura 1 aparece en azul esta elipse y al lado su representación en el plano *xy*





Recordando lo trabajado en el parágrafo 15.3 y considerando la elipse de la figura 2 como una región plana del Tipo I podemos determinar que $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, y $-\sqrt{9-4x^2} \leq y \leq \sqrt{9-4x^2}$. Además, tenemos que la variación de z es $0 \leq z \leq 9 - 4x^2 + y^2$ (si uno quisiera ingresar a la región E, de

manera paralela al eje *z*, desde los negativos a los positivos, tendría que entrar por el plano *xy* y salir por el paraboloide).

Todo esto nos conduce a la integral iterativa: $\boxed{\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2}}^{\sqrt{9-4x^2}} \int_0^{9-4x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.}$

Si la misma región plana la miramos de Tipo II:

$-3 \leq y \leq 3,\ -\frac{\sqrt{9-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-y^2}}{2}$ y $0 \leq z \leq 9 - 4x^2 + y^2$

Y la integral iterativa es $\boxed{\int_{-3}^{3} \int_{-(\sqrt{9-y^2})/2}^{(\sqrt{9-y^2})/2} \int_0^{9-4x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\, dx\, dy.}$

- **Como región sólida tipo 2: proyectamos sobre el plano *yz*:**

Al hacer $x = 0$, obtenemos una parábola en el plano *yz* cuya ecuación es $z = 9 - y^2$. En las figuras se presenta dicha proyección (dibujada en *yz*) (azul en la figura 3)

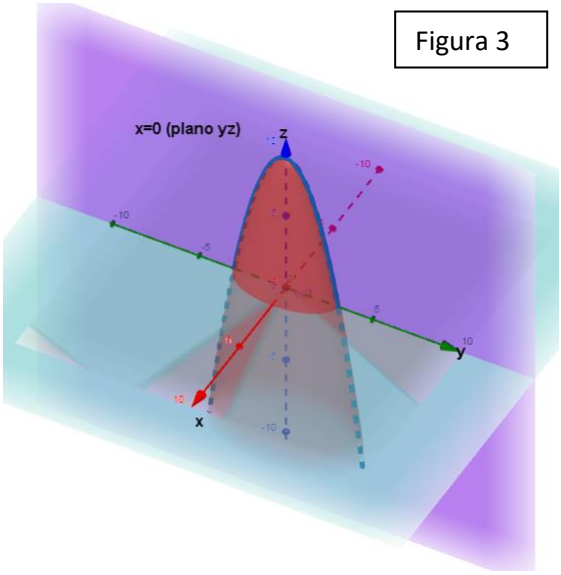


Figura 3

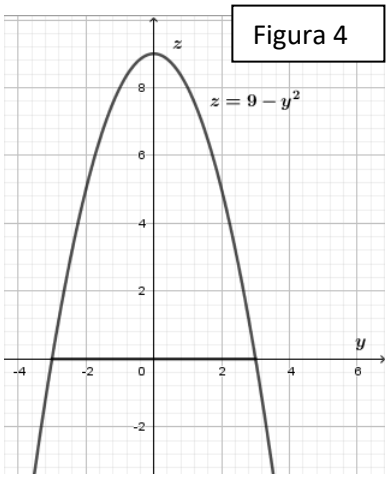


Figura 4

Al observar en la figura 4 una región plana del Tipo I determinamos que $-3 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 9 - y^2$, mientras que $-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}$ (estos límites salieron de despejar x de la ecuación del paraboloide).

Con todo esto tenemos $\boxed{\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}} f(x,y,z)\, dx\, dz\, dy.}$

Y si la miramos como una región plana del Tipo II los límites serían $0 \leq z \leq 9$, $-\sqrt{9-z} \leq y \leq \sqrt{9-z}$, y $-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}$.

Así tenemos: $\boxed{\int_0^9 \int_{-\sqrt{9-z}}^{\sqrt{9-z}} \int_{-\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z-y^2}}{2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\ .}$

- **Como región Sólida tipo 3: proyectamos sobre el plano *xz*:**

Haciendo $y = 0$ obtenemos una parábola en el plano *xz* cuya ecuación es $z = 9 - 4x^2$. En las figuras se presenta dicha proyección (dibujada en xz) (azul en la figura 5)

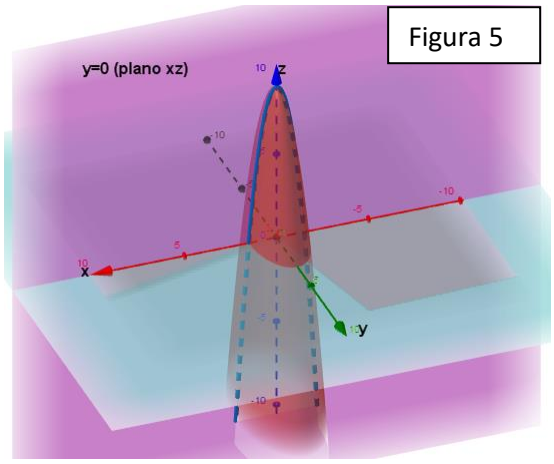


Figura 5

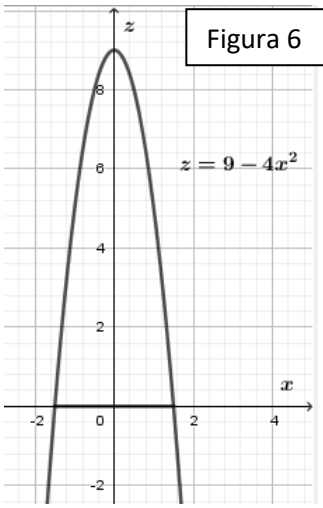


Figura 6

Al observar la figura 6 como una región plana del Tipo I encontramos que $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ (sale al hacer z=0 en la parábola y despejar x), $0 \leq z \leq 9 - 4x^2$, y despejando y de la ecuación del paraboloide hallamos que $-\sqrt{9-4x^2-z} \leq y \leq \sqrt{9-4x^2-z}$.

Con todo esto tenemos $\boxed{\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{9-4x^2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx.}$

Y si la miramos como región plana Tipo II:

$$0 \leq z \leq 9\ ,\ -\frac{\sqrt{9-z}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{9-z}}{2},\ -\sqrt{9-4x^2-z} \leq y \leq \sqrt{9-4x^2-z}$$

Obtenemos así $\boxed{\int_0^9 \int_{-\frac{\sqrt{9-z}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-z}}{2}} \int_{-\sqrt{9-4x^2-z}}^{\sqrt{9-4x^2-z}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz}$

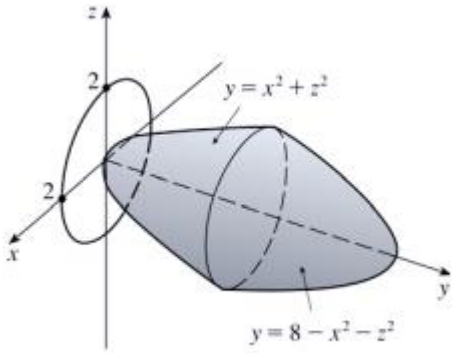
Las seis integrales iterativas pedidas son las que están recuadradas en rojo.

Aclaración:

- Suele no resultar fácil armar las seis integrales, algunas son más sencillas de ver que otras, e incluso más fácil de resolver también. Al momento de tener que resolver una integral triple uno acude a lo que le resulte más conveniente. Es probable que para resolverla tengamos que usar coordenadas polares.
- Siempre hay que tener en cuenta, al plantearlas, que la integral de más afuera tendrá límites constantes; la del medio tendrá límites que pueden depender de una de las variables (la de más afuera); y la de adentro tendrá límites que dependa de las otras dos.

Ejercicio: Use una integral triple para hallar el volumen del sólido encerrado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$ y $y = 8 - x^2 - z^2$

El sólido en cuestión se muestra en la figura.



En este caso será conveniente tratarlo como una región sólida tipo 3, es decir, proyectarlo sobre el plano xz.

Si igualamos ambos paraboloides tendremos:

$x^2 + z^2 = 8 - x^2 - z^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 2z^2 = 8 \quad \rightarrow \quad x^2 + z^2 = 4$

Esto es, sobre el plano xz tenemos la región plana D que es un círculo de radio 2.

Y analizando en los límites de y: $x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - z^2$

La región queda definida entonces como $E = \{(x, y, z) | x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - z^2 \, , x^2 + z^2 \leq 4 \}$.

Planteamos entonces el volumen como una integral triple:

$$V = \iiint_E dV = \iint_D \left(\int_{x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dy \right) dA = \iint_D 8 - 2x^2 - 2z^2 \, dA$$

A la región plana D es conveniente mirarla en coordenadas polares con

$x = rcos\theta, \;\; z = rsen\theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$:

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - 2r^2) \, r \, dr \, d\theta = 16\pi$$