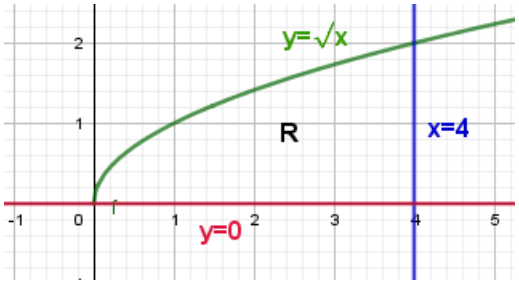
CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 15.3 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

Ejercicio: Esquematice la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = \sqrt{x}$, $x = 4$,

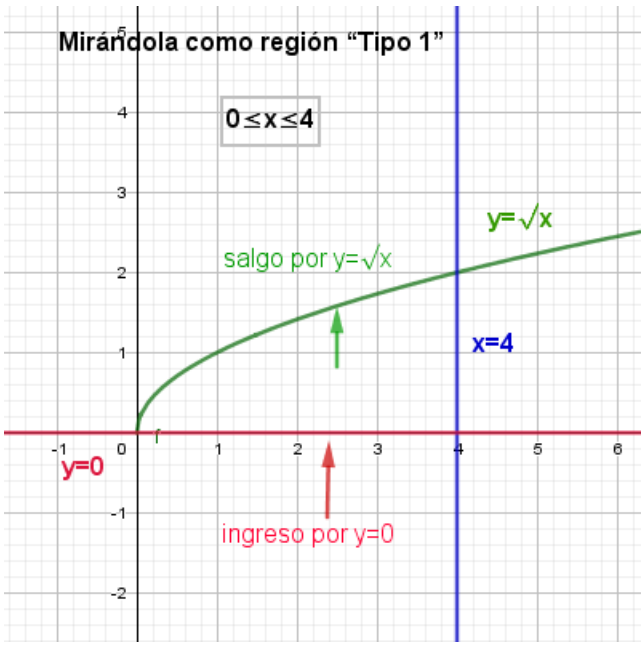
$y = 0$ y exprese $\iint_R f(x,y)dA$ como una integral iterativa, considerando a R como región tipo 1 y como región tipo 2

En el siguiente gráfico se representa la región R encerrada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$



(a) Para plantear la integral debemos mirar a la región como una "región de tipo I", esto es una región donde la variable *x* se mueve entre valores constantes, y la variable *y* entre dos funciones de *x*, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

Observando la región vemos que $0 \leq x \leq 4$, y para buscar los límites de la otra variable podemos pensar así: Con la *x* entre 0 y 4 "camino, ingreso, entro" a la región empezando desde los *y* negativos hacia los positivos. Debo preguntarme ¿Qué ecuación encuentro al ingresar? ¿Qué ecuación encuentro al salir? O bien ¿cuál de los límites de la región es el primero que encuentro? ¿y cuál el segundo? La respuesta a estas preguntas serán los límites buscados para la integral. El gráfico ayudará a esta idea.



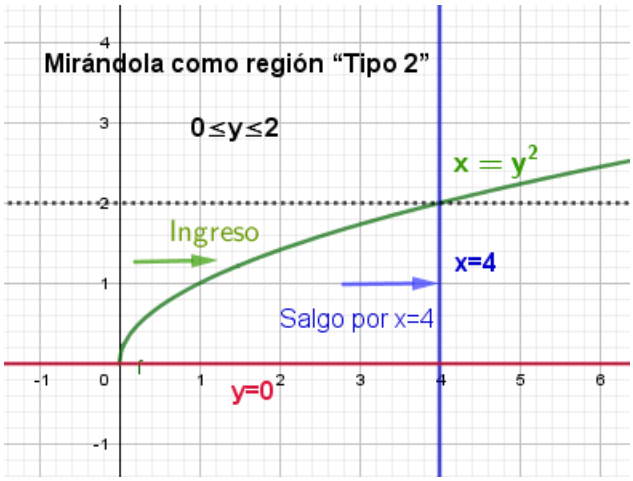
Una vez establecido que

$0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq \sqrt{x}$

Pasamos a plantear la integral pedida: $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx$

(b) Para plantear la integral debemos mirar a la región como una "región de tipo II", esto es una región donde la variable *y* se mueve entre valores constantes, y la variable *x* entre dos funciones de *y*, $h_1(y)$ y $h_2(y)$. ¡Atención! En este caso tienen que ser funciones de *y*, o sea no usaremos $y = \sqrt{x}$, sino que despejaremos *x*: $x = y^2$

Observando la región vemos que $0 \leq y \leq 2$, y para buscar los límites de la otra variable podemos pensar así: Con la *y* entre 0 y 2 "camino, ingreso, entro" a la región empezando desde los *x* negativos hacia los positivos. Debo preguntarme ¿Qué ecuación encuentro al ingresar? ¿Qué ecuación encuentro al salir? O bien ¿cuál de los límites de la región es el primero que encuentro? ¿y cuál el segundo? La respuesta a estas preguntas serán los límites buscados para la integral. El gráfico ayudará a esta idea.



Una vez establecido que

$0 \leq y \leq 2$ y $y^2 \leq x \leq 4$

Pasamos a plantear la integral pedida: $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 f(x,y)\, dx\, dy$

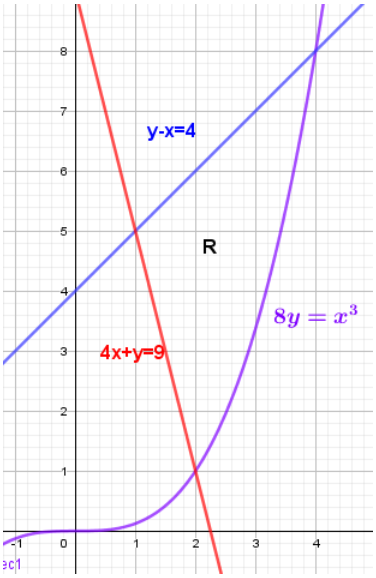
Observar:

- SIEMPRE en la integral de más afuera, se colocan las constantes, números, NUNCA una función de *x* o de *y*.
- El orden *dx dy* o *dy dx* depende de cómo miramos la región. Si es tipo I será *dy dx* y si es tipo II será *dx dy*.

Ejercicio: Mismo enunciado que el anterior con lo límites:

$8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$

La región R sobre la cuál integraremos se presenta a continuación



En este caso, como hemos podido graficar la región, podemos determinar los puntos de intersección de las tres curvas directamente, estos son $(1,5)$, $(2,1)$ y $(4,8)$. Si no tuviéramos conocimiento exacto del gráfico deberíamos resolver los siguientes sistemas para hallar cada uno de estos puntos:

$$\begin{cases} 4x + y = 9 \\ y - x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y = x^3 \\ 4x + y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y = x^3 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

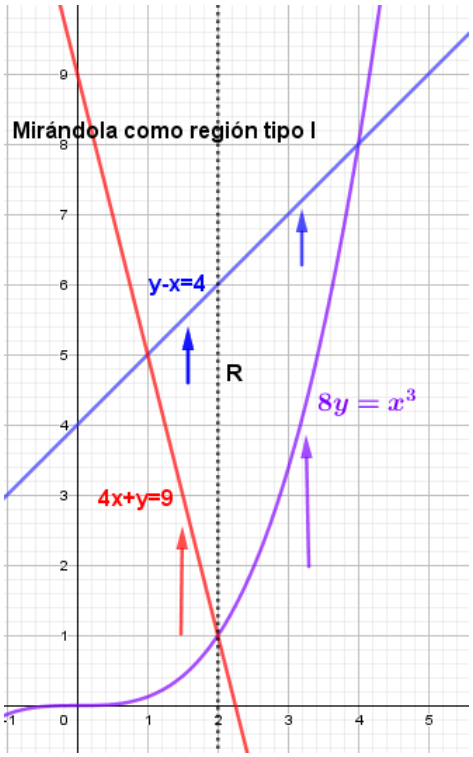
(a) Observando la región como una región del tipo I, podemos notar que dejando la variable *x* entre constantes, e ingresando a la región desde los valores negativos de *y* hacia los positivos, la curva por la que ingresamos, no es siempre la misma, por lo tanto, tendremos que dividirla en dos:

- Cuando *x* varía entre 1 y 2, ingresamos a la región por $4x + y = 9$ y salimos por $y - x = 4$ (lado izquierdo de la recta punteada). Recordando que este "ingreso" y "salida" deben ser funciones de *x* (por estar mirándola como región tipo I) lo podemos expresar asi:

$$1 \leq x \leq 2 \quad \rightarrow \quad 9 - 4x \leq y \leq 4 + x$$

- Cuando *x* varía entre 2 y 4, ingresamos a la región por la curva $8y = x^3$ y salimos por $y - x = 4$ (lado derecho de la recta punteada). Nuevamente teniendo en cuenta que este ingreso y salida deben ser funciones de *x* lo expresamos asi:

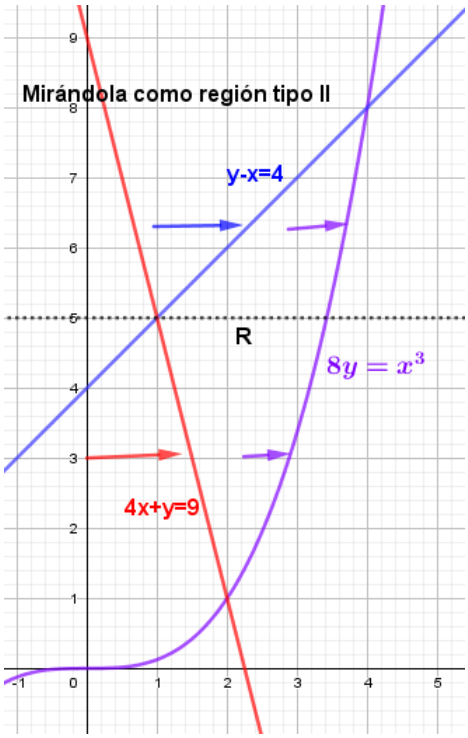
$$2 \leq x \leq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{8} \leq y \leq 4 + x$$



Ya con la región bien delimitada, la integral iterativa, al expresar la región como una región del tipo I, nos queda de la siguiente forma:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^2 \int_{9-4x}^{4+x} f(x,y)dy\,dx + \int_2^4 \int_{\frac{x^3}{8}}^{4+x} f(x,y)dy\,dx$$

(b) De manera análoga, al observar la región como una región del tipo II, podemos notar que, dejando la variable *y* entre constantes, e ingresando a la región desde los valores negativos de *x* hacia los positivos (de izquierda a derecha) la curva por la que ingresamos, no es siempre la misma, por lo tanto, tendremos que dividirla en dos:



- Cuando *y* varía entre 1 y 5, ingresamos a la región por la curva $4x + y = 9$ y salimos por la curva $8y = x^3$ (esto es debajo de la línea punteada) y como la estamos mirando como región tipo II las mismas deben ser función de y, por lo tanto, podemos expresarlo asi:

$$1 \leq y \leq 5 \quad \rightarrow \quad \frac{9-y}{4} \leq x \leq 2\sqrt[3]{y}.$$

- Cuando *y* varía entre 5 y 8, ingresamos a la región por la curva $y - x = 4$ y salimos por $8y = x^3$. Al expresarlas como una función de *y* obtenemos:

$$5 \leq y \leq 8 \quad \rightarrow \quad y - 4 \leq x \leq 2\sqrt[3]{y}$$

Luego, la integral iterativa, al expresar la región como una región del tipo II, nos queda de la siguiente forma:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_1^5 \int_{\frac{9-y}{4}}^{2\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\,dy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\,dy$$

Ejercicio: Calcule el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas:

$z = x^2 + 4$, $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $z = 0$

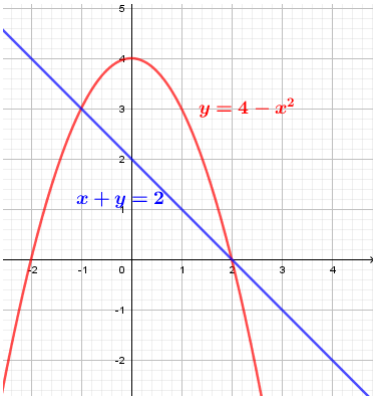
El volumen pedido es el de el sólido que se encuentra por encima del plano *xy* y debajo del cilindro parabólico $z = x^2 + 4$, y acotado por el cilindro parabólico $y = 4 - x^2$ y el plano $x + y = 2$. Imaginar este sólido puede no ser tarea fácil, pero pretendemos calcular el volumen mediante integrales dobles, por lo que debemos definir la función a integrar y los límites correspondientes.

Consideraremos $z = f(x, y) = x^2 + 4$, tendremos que determinar los límites de *x* e *y*.

Lo que hacemos acá es olvidar por un momento que estamos en tres dimensiones y pensar las ecuaciones $y = 4 - x^2$, $x + y = 2$ en dos dimensiones, es decir, mirarlas en el plano *xy*. (estamos proyectando el sólido sobre uno de los planos coordenados, en este caso *xy*) Haciendo esto, tenemos una parábola con ramas hacia abajo, corrida cuatro lugares en el eje de las *y*, y una recta.

Resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ encontramos que los puntos de intersección entre las dos curvas son $(2, 0)$ y $(-1, 3)$.

Con esto podemos determinar que $-1 \leq x \leq 2$ y $2 - x \leq y \leq 4 - x^2$ (Observe que estamos mirando a esta región como una región de tipo 1).



Una vez hallado los límites podemos calcular el volumen pedido resolviendo la siguiente integral doble (queda a cargo del alumno terminar las cuentas):

$$V = \int_{-1}^{2} \int_{2-x}^{4-x^2} x^2 + 4 \, dy \, dx$$