CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 14.5 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

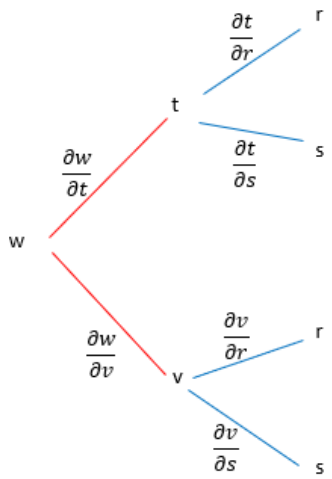
Ejercicio: Utilice la regla de la cadena para hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$

$w = e^{tv}$; $t = r + s$: $v = rs$

Observemos que w es una función que depende de t y v, y a su vez cada una de ellas depende de otras variables r y s.

Entonces, para hallar las derivadas pedidas debemos calcular, respectivamente:

$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$



Calcularemos solo $\frac{\partial w}{\partial r}$, la otra es análoga.

Calculemos las derivadas correspondientes y reemplacemos:

$\frac{\partial w}{\partial t} = e^{tv}v$; $\frac{\partial w}{\partial v} = e^{tv}t$

$\frac{\partial t}{\partial r} = 1$; $\frac{\partial v}{\partial r} = s$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} = e^{tv}v\,.1 + e^{tv}t\,.s$$

Ahora escribamos todo en términos de las variables r y s, y operemos:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = e^{(r+s)rs}rs + e^{(r+s)rs}(r+s)s = se^{(r+s)rs}(2r+s)$$

Ejercicio: Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ suponiendo que $z = f(x, y)$ satisface la ecuación dada:

$$2z^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0.$$

En este caso tenemos una ecuación $F(x,y,z)=0$ que determina implícitamente una función de dos variables $z=f(x,y)$. Siguiendo el resultado 6 de la pág. 929, podemos hallar lo pedido haciendo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

Calculemos entonces F_x , F_y , F_z

$F_x(x,y,z)=2xy^2$; $\quad F_y(x,y,z)=-3z^2+2x^2y$; $\quad F_z(x,y,z)=6z^2-6yz+4$

Así $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=-\frac{2xy^2}{6z^2-6yz+4}$ y

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y,z)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}=\frac{-3z^2+2x^2y}{6z^2-6yz+4}$.

Ejercicio: El radio r y la altura h de un cilindro circular recto aumentan a razón de $0{,}01\ cm/min$ y $0{,}02\ cm/min$ respectivamente. Use la regla de la cadena para calcular la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo, cuando $r=4\ cm$ y $h=7\ cm$. ¿Con qué rapidez varía el área de la superficie curva?

- El Volumen de un cilindro circular recto, que depende de su radio y de su altura se obtiene mediante la fórmula $V(r,h)=\pi\, r^2 h$.
- El dato de que el radio aumenta a razón de $0{,}01\ cm/min$ lo escribimos en lenguaje matemático como $\frac{dr}{dt}=0{,}01\ cm/min$ (recuerde que la derivada es una razón de cambio)
- El dato de que la altura aumenta a razón de $0{,}02\ cm/min$ lo escribimos en lenguaje matemático como $\frac{dh}{dt}=0{,}02\ cm/min$
- El volumen cambia a medida que cambia el radio y la altura, y cada uno de estos cambia con el paso del tiempo. Por lo tanto, la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo podemos expresarla como $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}$.

Calculemos las parciales: $\frac{\partial V}{\partial r}=2\pi rh$, $\frac{\partial V}{\partial h}=\pi r^2$.

Entonces $\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt}=2\pi rh\,.\,0{,}01+\pi r^2\,.\,0{,}02$.

Cuando $r=4\ cm$ y $h=7\ cm$ tenemos que la tasa de crecimiento del volumen con respecto al tiempo es $\frac{dV}{dt}=0{,}88\pi\ cm^3/min$.

Para la segunda parte:

- La superficie del cilindro la podemos calcular como $A(r,h)=2\pi rh+2\pi r^2$
- La superficie cambia en función del radio y la altura, y estos, a su vez cambian en función del tiempo, por lo tanto: $\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt}$

Procedamos de manera análoga a lo anterior:

Calculemos las parciales: $\frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi h + 4\pi r$, $\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$ y reemplacemos:

$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{dt} = (2\pi h + 4\pi r).0{,}01 + 2\pi r\,.\,0{,}02$

Cuando $r = 4\ cm$ y $h = 7\ cm$ tenemos que la tasa de crecimiento del área de la superficie es

$\frac{dA}{dt} = 0{,}46\pi\ cm^2/min.$