CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 14.3 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

Ejercicio: Obtenga las primeras derivadas parciales de $f(x,y) = (x^3 - y^2)^2$

Observemos que $f(x,y)$ es una función compuesta, por lo cual recurriremos a la regla de la cadena.

Para obtener la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a la variable *x*, es decir f_x o $\frac{\partial f}{\partial x}$, debemos considerar a la variable *y* como una constante y derivar con respecto a *x*:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x^3 - y^2).3x^2 = 6(x^3 - y^2)x^2$$

Para obtener la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a la variable *y*, es decir f_y o $\frac{\partial f}{\partial y}$, debemos considerar a la variable *y* como una constante y derivar con respecto a *y*:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x^3 - y^2)\,(-2y) = -6(x^3 - y^2)y$$

Ejercicio: Una lámina de metal plana se encuentra en un plano *xy* y la temperatura T en un punto (x,y) está dada por $T(x,y) = 10(x^2 + y^2)^2$ donde *T* se mide en grados y *x* e *y* en centímetros. Calcule la tasa de cambio o variación de *T* con respecto a la distancia en el punto $(1,2)$ en la dirección (a) del eje *x*, (b) del eje *y*.

Lo que el problema nos está planteando es lo siguiente: Estamos parados en el punto $(1,2)$ con una cierta temperatura y nos movemos en dirección de cada eje; se pide cuánto variará la temperatura cuando realicemos dichos movimientos.

Recordemos que las derivadas parciales se pueden interpretar también como variaciones o cambio de la función en ciertas direcciones. Calculemos entonces cada derivada parcial, avaluada en el punto en cuestión.

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = 10\,.\,2(x^2 + y^2).2x = 40(x^2 + y^2)x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x}(1,2) = 40\,(1+4)1 = 200$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 10\,.\,2(x^2 + y^2).2y = 40(x^2 + y^2)y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial y}(1,2) = 40\,(1+4)2 = 400$$

Esto indica que la variación de la temperatura desde el punto $(1,2)$ en dirección del eje *x* es de 200 grados por centímetro. Y la variación de la temperatura desde el punto $(1,2)$ en dirección del eje *y* es de 400 grados por centímetro.

Ejercicio: Mediante derivación implícita determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$e^z = xyz$$

Observemos acá, que tenemos una $z = f(x, y)$ definida implícitamente, no esta la variable z despejada.

Para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ derivaremos ambos miembros respecto de x. Para hacer esto, tendremos en cuenta las reglas de derivación vistas en cálculo de una variable.

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^z) = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) \quad \rightarrow \quad e^z \frac{\partial z}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} \quad \rightarrow \quad e^z \frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial x} = yz$$

$$\rightarrow \quad (e^z - xy)\frac{\partial z}{\partial x} = yz \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}$$

Análogamente, para hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$ derivaremos ambos miembros respecto de y. Para hacer esto, tendremos en cuenta las reglas de derivación vistas en cálculo de una variable.

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^z) = \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \quad \rightarrow \quad e^z \frac{\partial z}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} \quad \rightarrow \quad e^z \frac{\partial z}{\partial y} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

$$\rightarrow \quad (e^z - xy)\frac{\partial z}{\partial y} = xz \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}$$