CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 13.1 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

Ejercicio: Determinar el dominio de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + sent\,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\,\mathbf{k}$

Para hallar el dominio de la función vectorial, analicemos el dominio de cada función componente:

$\frac{t-2}{t+2}$ tendrá problemas cuando $t = -2$ ya que este valor anulará el denominador;

$sent$ tiene dominio todos los reales;

$\ln(9-t^2)$ está definido sólo para valores mayores que cero, esto es: $9 - t^2 > 0$, lo cual implica $9 > t^2$. De aquí, $|t| < 3$, es decir, $-3 < t < 3$.

Juntando todo lo obtenido el dominio de la función vectorial dada es $(-3,-2) \cup (-2,3)$.

Ejercicio: Grafique la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la cuál t se incrementa.

$\mathbf{r}(t) = \langle sen\,\pi t, t, \cos \pi t\rangle$

Las ecuaciones paramétricas de esta curva son: $\begin{cases} x = sen\,\pi t \\ y = t \\ z = \cos \pi t \end{cases}$.

Observemos que $x^2 + z^2 = sen^2(\pi t) + cos^2(\pi t) = 1$, lo cuál nos da una circunferencia de radio 1 en el plano xz, que, al estar trabajando en R^3 y al no aparecer la variable y nos proporciona un cilindro circular de radio 1 extendido a lo largo del eje y. Sobre este cilindro, se encuentra la curva.

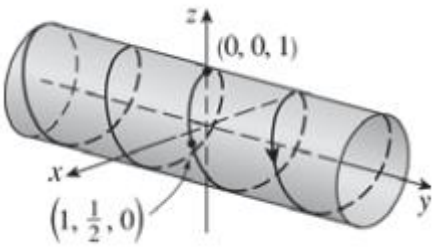
Tomemos algunos valores de t para guiarnos:

Si $t = 0$, estamos en el punto $(0,0,1)$.

Si $t = \frac{1}{2}$, estamos en el punto $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Si $t = 1$, estamos en el punto $(0,1,-1)$.

La curva es una hélice que gira en espiral hacia la derecha, alrededor del cilindro.



Ejercicio: Encuentre una función vectorial que represente la curva de intersección de las dos superficies: el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z = 1 + y$.

Para encontrar la intersección entre ambas superficies, las igualaremos:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + y \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = (1+y)^2 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

Encontramos que la intersección entre ambas superficies es una parábola, con ramas hacia arriba y vértice en $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Llamando t al parámetro tenemos $x = t$, $y = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $z = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ (ésta última sale de reemplazar la expresión de y hallada en $z = 1 + y$.

Por lo tanto, la función vectorial que representa la intersección de las superficies dadas es:

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\mathbf{k}$$