

CALCULO 2: Ejercicios resueltos

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos en relación a los temas trabajados en la sección 15.1 y 15.2 para que éstos sirvan de modelo a la hora de desarrollar los ejercicios propuestos.

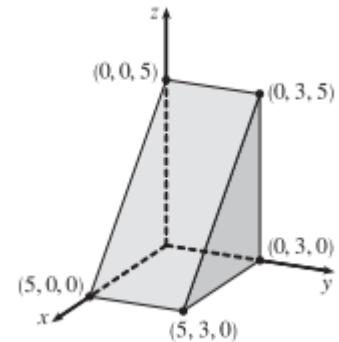
Ejercicio: Evalúe la integral doble sobre la región R, identificándola primero como el volumen de un sólido.

$$\iint_R (5 - x) dA; \quad R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}$$

Si pensamos primero en $z = 5 - x$, esto es un plano y no tenemos restricciones para la variable y , pero hay que tener en cuenta que a este plano nos interesa mirarlo sobre la región R, lo cual pone, ahora sí, unas restricciones tanto sobre x , como sobre y . Al tomar estas restricciones, el sólido al que queremos calcularle el volumen es el que aparece en la figura.

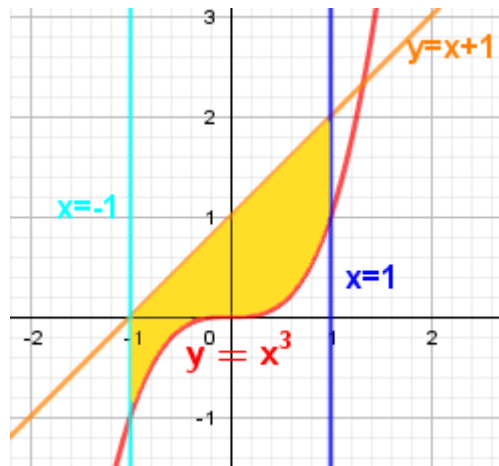
Al evaluar la integral doble sobre el rectángulo R tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_R (5 - x) dA &= \int_0^5 \int_0^3 (5 - x) dy dx = \int_0^5 (5y - xy) \Big|_{y=0}^{y=3} dx \\ &= \int_0^5 (15 - 3x) dx = 15x - \frac{3x^2}{2} \Big|_0^5 = 75 - \frac{75}{2} \\ &= \frac{75}{2} \end{aligned}$$



Ejercicio: Evalúe la integral iterativa

$$\int_{-1}^1 \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y) dy dx$$



Observemos que el orden “dy dx” hace referencia a que primero integro respecto de y , considerando a x como una constante. Puede ser útil escribirlo de la siguiente manera:

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y) dy \right] dx.$$

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y) dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[3xy + 2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=x+1} dx$$

$$\int_{-1}^1 [3x(x+1) + (x+1)^2] - [3x(x^3) + (x^3)^2] dx = \int_{-1}^1 -x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 5x + 1 dx$$

Una vez que integramos con respecto a y , y aplicamos la regla de Barrow, recién ahí pasamos a integrar con respecto a la variable x

$$\int_{-1}^1 -x^6 - 3x^4 + 4x^2 + 5x + 1 dx = \left[-\frac{x^7}{7} - 3 \frac{x^5}{5} + 4 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \frac{334}{105} \text{ (hacer las cuentas correspondientes para verificar resultado)}$$

Observar:

- Cuando integro con respecto a una variable, la otra actúa como constante.
- La primera integral con sus límites y el dx lo mantengo hasta que integro con respecto a esa variable x .
- Al hacer la primera integración, antes de aplicar la regla de Barrow, puede ser útil colocar qué variable voy a reemplazar, por ejemplo $y = x + 1$ y $y = x^3$ a fin de evitar confusión a la hora de reemplazar.
- **A partir de acá el resto de los contenidos a ver incluyen integrales. Si no recuerdas como integrar con una variable (cálculo 1) sugiero que repases o revises los temas correspondientes a fin de facilitarte el trabajo en los temas venideros.**