Respuestas Tema II

Ejercicio 1. $F = \Big(\underbrace{2xe^{-y}}_{P}, \underbrace{2y - x^2e^{-y}}_{Q}\Big)$

$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ es independiente de la trayectoria si $\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ para cualquier par de curvas C_1, C_2 en $\mathrm{dom}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{R}^2$ con mismos puntos iniciales y finales.

Por otro lado $P_y = -2xe^{-y}$ y $Q_x = -2xe^{-y}$, es decir, $P_y = Q_x$ en $\mathrm{dom}(\boldsymbol{F}) = \mathbb{R}^2$ que es una región simplemente conexa y además P y Q tienen derivadas parciales continuas. Entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo y $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ es independiente de la trayectoria.

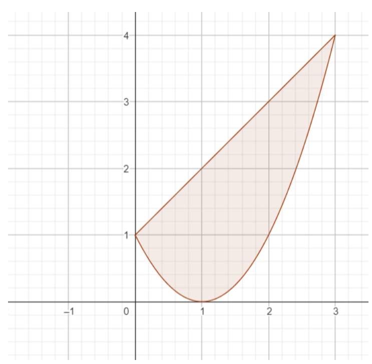
Entonces, podemos escribir $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Encontremos una función potencial f:

$$\int P dx = \int 2xe^{-y} dx = 2\frac{x^2}{2}e^{-y} + g(y),$$
$$\int Q dy = \int 2y - x^2e^{-y} dy = 2\frac{y^2}{2} + x^2e^{-y} + g(x).$$

Por lo tanto $f = x^2e^{-y} + y^2$.
Por otro lado, C tiene punto inicial $(0,1)$ y final $(2,5)$. Por el teorema fundamental de las integrales de linea

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = f(2,5) - f(0,1) = \left(2^2e^{-5} + 5^2\right) - \left(0^2e^{-1} + 1^2\right) = 4e^{-5} + 24.$$

Ejercicio 2.



$$D = \left\{(x,y) : \begin{array}{c} 0 \le x \le 3 \\ (x-1)^2 \le y \le x+1 \end{array}\right\} \quad \textbf{(región tipo 1)}$$
$$= \left\{(x,y) : \begin{array}{c} y-1 \le x \le \sqrt{y}+1 \\ 1 \le y \le 4 \end{array}\right\} \cup \left\{(x,y) : \begin{array}{c} -\sqrt{y}+1 \le x \le \sqrt{y}+1 \\ 0 \le y \le 1 \end{array}\right\} \quad \textbf{(unión de regiones tipo 2)}$$

Por otro lado, para integrar el campo $\boldsymbol{F} = (x-y, x+y)$ vamos a usar el teorema de Green. La curva es cerrada, suave por tramos y la orientamos positivamente, ademas las componentes de $\boldsymbol{F}$ tienen derivadas parciales continuas sobre D. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_D (Q_x - P_y)\, dA \\
&= \int_0^3 \int_{(x-1)^2}^{x+1} (1+1)\, dydx \\
&= 2\int_0^3 x+1-(x-1)^2 dx \\
&= 2\left(\frac{x^2}{2}+x-\frac{(x-1)^3}{3}\right)_0^3 \\
&= 2\left(\frac{3^2}{2}+3-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(-\frac{-1}{3}\right) \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. Notar que $\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ o bien $x^2+y^2=4^2$, y no hay restricciones para z. Esto es una cilindro circular recto.

Para calcular la integral:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_u &= (-4\sin u, 4\cos u, 0), \\
\boldsymbol{r}_v &= (0,0,1), \\
\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v &= (4\cos u, 4\sin u, 0)\,, \\
|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| &= 4.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\iint_S \left(x^2+y^2+z\right) ds &= \int_{-2}^{1}\int_0^{\pi} (16+v)\, 4dudv \\
&= 4\pi\left(16v+\frac{v^2}{2}\right)_{-2}^{1} \\
&= 4\pi\left(16+\frac{1}{2}\right)-4\pi\left(-32+\frac{4}{2}\right) \\
&= 186\pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Para calcular la integral, podemos usar el teorema de Gauss, pues la región es solida simple, la superficie frontera está orientada positivamente y las componentes del campo tienen derivadas parciales continuas.

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_E (1+1+1) dV \\
&= 3\cdot \text{volumen}(E) \\
&= 3\frac{4}{3}\pi\frac{1}{8} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = 3\cdot\text{volumen}(E)=\frac{\pi}{2}$, tenemos que $\text{volumen}(E)=\frac{\pi}{6}$.