CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEJOS

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

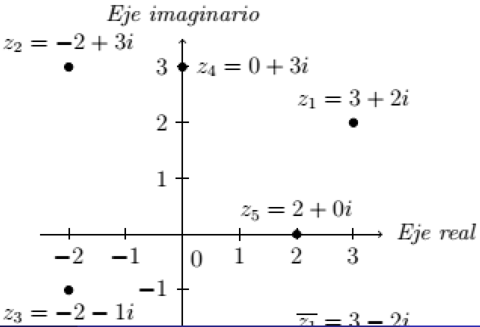
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEJOS

- Los números reales se representan geométricamente en una recta.
- Los números complejos se representan geométricamente en un plano.

Dado un número complejo en forma binómica, $z = a + bi$, se lo puede representar mediante el punto (a, b) del **plano coordenado,** también llamado, en este contexto, **plano complejo**.

- Al eje horizontal se lo llama **eje real**, ya que en él se indica $\mathrm{Re}\,(z)$.
- El eje vertical se llama **eje imaginario**, ya que en él se indica $\mathrm{Im}\,(z)$.

Ejemplo:



- Recordemos: el módulo (o valor absoluto) de un número real a indica la distancia del punto a al punto 0 sobre la recta real.
- Análogamente: el módulo de un número complejo $z = a + bi$ indica la distancia del punto (a, b) al origen $(0, 0)$ en el plano complejo.

Definición (1.8: módulo)

El módulo de un número complejo $z = a + bi$ está dado por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo: Calcular los módulos de $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4i$ y $z_3 = -5$.
Solución:
En el caso de z_1, $a = 2$ y $b = -3$, entonces, aplicando la fórmula anterior,
$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.
En el caso de z_2, $a = 0$ y $b = 4$, entonces,
$|z_2| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$.
Por último, en el caso de z_3, $a = -5$ y $b = 0$, entonces,
$|z_3| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$.

Definición (argumento)

Dado un número complejo $z = a + bi \neq 0$*, se denomina* **argumento** *de* z*, y se denota por* $\arg(z)$*, al ángulo mayor o igual que* 0 *y menor que* 2π*, medido en sentido antihorario, entre el semieje real positivo y el segmento que une el origen* $(0,0)$ *con el punto* (a,b)*.*

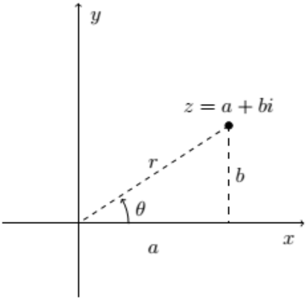
¿Cómo se calcula el argumento de un número complejo?

Dado $z = a + bi \neq 0$,

$$\arg(z) = \begin{cases} arctg\,(b/a) & \text{si } a > 0 \text{ y } b > 0 \\ arctg\,(b/a) + 2\pi & \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \\ arctg\,(b/a) + \pi & \text{si } a < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

¿Cómo se obtienen las fórmulas anteriores?

Para deducir la primer fórmula, observemos:



Aplicando las correspondientes relaciones trigonométricas tenemos que

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \;\; \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \;\; \text{y} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \text{o bien,} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Definición (1.9: forma polar o trigonométrica)

La forma polar (o trigonométrica) de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ *es*

$$z = r\left(cos\theta + isen\theta\right),$$

donde $r = |z|$ *y* $\theta = \arg(z)$.

Ejemplo: Expresar a $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ en forma polar (o trigonométrica).
Resolución: en pág. 14.

- *Recordar:* π radianes equivalen a 180°.
- *Consejo:* calcular $arctg\left(b/a\right)$ en grados y después, si se desea, convertir a radianes.
- Los radianes son particularmente importantes cuando se trabaja con números complejos en forma exponencial.

Teorema (1.1: producto y cociente en forma polar)

Si $z_1 = r_1\left(cos\theta_1 + isen\theta_1\right)$ *y* $z_2 = r_2\left(cos\theta_2 + isen\theta_2\right)$, *entonces*

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2\left[cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + isen\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + isen\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]$ *siempre que* $z_2 \neq 0$

Demostración: Se omite en este curso.

Ejemplo: Para $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$ y $z_2 = 3\left(cos\frac{11\pi}{4} + isen\frac{11\pi}{4}\right)$ calcular en forma polar $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$. Expresar los resultados también en forma polar.

Resolución: en pág. 15.

Teorema (1.2: de Moivre)

Si $z = r\left(cos\theta + isen\theta\right)$ *y* n *es un número entero, entonces*

$$z^n = r^n\left(cosn\theta + isenn\theta\right).$$

Demostración: Se usa el método de Inducción Matemática que veremos más adelante.

Ejemplo: Para $z = -1 + \sqrt{3}i$, calcular z^{12}.
Resolución: en pág. 16.

Definición (1.10: raíz $n-$ésima)

Dado $n \in \mathbb{N}$, un número complejo w es una raíz n-ésima del número complejo z si y sólo si

$$w^n = z.$$

Teorema (1.3: cálculo de raíces $n-$ésimas)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado un número complejo no nulo $z = r\,(cos\theta + isen\theta)$, existen exactamente n raíces n-ésimas distintas de z dadas por

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, ..., n-1$.

Demostración: Se omite (se puede leer en la pág. 18 del libro).

Interpretación geométrica

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $z = r\left(cos\theta + isen\theta\right)$.

  - **Observación:** Todas las raíces n-ésimas de z tienen módulo $\sqrt[n]{r}$.

- Todas las raíces n-ésimas de z se encuentran en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en $(0, 0)$.
  - **Observación:** La diferencia entre los argumentos de dos raíces n-ésimas sucesivas de z es de $2\pi/n$.
- Todas las raíces n-ésimas de z se encuentran igualmente espaciadas.

Por lo tanto: Las raíces n-ésimas de z constituyen los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y con ángulo central $2\pi/n$.

Ejemplo: Hallar las raíces terceras de $z = -1 + \sqrt{3}i$, representarlas gráficamente e interpretarlas geométricamente.
Resolución: en pág. 19.

A diferencia de los números reales, los números complejos permiten resolver cualquier ecuación polinómica.

Ejemplo: Resolver la ecuación de segundo grado $3x^2 + 4x + 5 = 0$.
Resolución: en pág. 21.