CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEJOS

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

- El "primer" conjunto (infinito) de números que conocemos es $\mathbb{N}$.
  - Sin embargo, por ej., la ecuación $x + 2 = 1$ no tiene solución en $\mathbb{N}$...
- Consideremos, en cambio, el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros.
  - En $\mathbb{Z}$ podemos encontrar, para la ec. anterior, la solución $x = -1$.
  - Sin embargo, por ej., la ecuación $3x = 1$ no tiene solución en $\mathbb{Z}$...
- Consideremos, entonces, el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los racionales.
  - En $\mathbb{Q}$ podemos encontrar, para la ec. anterior, la solución $x = \frac{1}{3}$.
  - Sin embargo, por ej., la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$...
- Consideremos, ahora, el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.
  - En $\mathbb{R}$ podemos encontrar, para la ec. anterior, la solución $x = \sqrt{2}$.
  - Sin embargo, por ej., la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$...

Para dar solución a esta ecuación se introduce una **unidad imaginaria**, a la cual se representa generalmente mediante la letra i, y se le asigna la propiedad de que $i^2 = -1$.
Observación: Dado que su cuadrado es negativo, i no representa un número real...

Definición (1.1: forma binómica o canónica)

La **forma binómica** *(o* **canónica***) de un número complejo z es*

$$z = a + bi \ \text{con} \ a, b \in \mathbb{R} \ \text{e} \ i^2 = -1,$$

donde a se denomina la **parte real** *de z, denotada por $\mathrm{Re}\,(z)$, y b, la* **parte imaginaria** *de z, denotada por $\mathrm{Im}\,(z)$.*

Ejemplo: Si $z = 2 - 3i$, $\mathrm{Re}\,(z) = 2$ e $\mathrm{Im}\,(z) = -3$.

Observación: Cualquier número real x se puede escribir como el número complejo en forma binómica $x + 0i$.

Nota: Si un número complejo z satisface que $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, se dice que z es **imaginario puro**.

Definición (1.2: igualdad)

Dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ son iguales ($z = w$) si y sólo si

$$a = c \ \text{y} \ b = d.$$

Definición (1.3: producto por un número real)

Dados un número complejo $z = a + bi$ y un número real k, se define

$$kz = ka + (kb)\, i.$$

Ejemplo: Para $z = 2 - 3i$, calcular $-2z$ y $\frac{1}{2}z$.

Solución: Utilizando la notación de la definición anterior, en nuestro caso, $a = 2$ y $b = -3$, entonces, aplicando dicha definición con $k = -2$,

$$-2z = (-2)\,2 + [(-2)\,(-3)]\, i = -4 + 6i$$

luego, para $k = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}z = \frac{1}{2}2 + \left[\frac{1}{2}(-3)\right] i = 1 - \frac{3}{2}i$$

Definición (1.4: suma y resta)

Dados dos números complejos $z = a + bi$ *y* $w = c + di$, *se define*

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)\, i \\ z - w &= (a - c) + (b - d)\, i \end{aligned}$$

Ejemplo: Para $z = 2 - 3i$ y $w = -1 + 4i$, calcular $z + w$ y $z - w$.

Solución: Utilizando la notación de la definición anterior, en este caso, $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$ y $d = 4$, entonces, aplicando dicha definición,

$$\begin{aligned} z + w &= [2 + (-1)] + [-3 + 4]\, i = 1 + i \\ z - w &= [2 - (-1)] + [-3 - 4]\, i = 3 - 7i \end{aligned}$$

Observación: $z - w = z + (-1)\, w$. En efecto:

$$\begin{aligned} z + (-1)\, w = (a + bi) + (-1)(c + di) &= (a + bi) + [-c + (-d)\, i] \\ &= [a + (-c)] + [b + (-d)]\, i = (a - c) + (b - d)\, i. \end{aligned}$$

Nota: Al número complejo $(-1)\, w$ se lo denomina el **opuesto** de w y se lo suele denotar por $-w$.

Definición (1.5: producto)

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se define

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

Ejemplo: Para $z = 2 - 3i$ y $w = -1 + 4i$, calcular zw.
Solución: **Ejercicio!** (Ver ejemplo 1.3, pág. 9).

Propiedades de la suma y el producto de números complejos

Si z, z_1, z_2 y z_3 son números complejos, entonces:

1. $k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2$ cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$.
2. $(k_1 + k_2)\, z = k_1 z + k_2 z$ cualesquiera sean $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
3. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (conmutativa de la suma)
4. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociativa de la suma)
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (conmutativa del producto)
6. $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (asociativa del producto)
7. $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$ (distributiva del producto con la suma)

Demostración: **Ejercicio!**

Como una propiedad adicional, las **potencias naturales de i** siguen un patrón que es útil conocer: se repiten cada cuarta potencia. En efecto:

$$\begin{array}{ll}
i^0 = 1 \text{ (\textit{lo definimos así})} & i^4 = i^3 i = (-i)\, i = -i^2 = -(-1) = 1 \\
i^1 = i & i^5 = i^4 i = 1i = i \\
i^2 = -1 & i^6 = i^5 i = ii = i^2 = -1 \\
i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i & i^7 = i^6 i = (-1)\, i = -i
\end{array}$$

y así sucesivamente. Ahora, si n es cualquier número natural y r es el resto de dividir a n entre 4, entonces

$$n = 4c + r,$$

donde c representa al cociente de dicha división (T. del Resto), luego,

$$i^n = i^{4c+r} = i^{4c} i^r = \left(i^4\right)^c i^r = 1^c i^r = i^r$$

Ejemplo: Calcular i^{29} e i^{103}.

Solución:

El resto de dividir 29 entre 4 es 1, por lo tanto, $i^{29} = i^1 = i$.

El resto de dividir 103 entre 4 es 3, por lo tanto, $i^{103} = i^3 = -i$.

Definición (1.7: cociente)

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ donde $w \neq 0$, se define

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Ejemplo: Para $z = 2 - 3i$ y $w = -1 + 4i$, calcular $\frac{z}{w}$.
Solución: Utilizando la notación de la definición anterior, en nuestro ejemplo, $a = 2$, $b = -3$, $c = -1$ y $d = 4$, entonces, aplicando dicha definición,

$$\frac{z}{w} = \frac{2\,(-1) + (-3)\,4}{(-1)^2 + 4^2} - \frac{(-3)\,(-1) - 2.4}{(-1)^2 + 4^2} i = \frac{-2 - 12}{1 + 16} - \frac{3 - 8}{1 + 16} i = \frac{-14}{17} -$$

Observación: Para todo número complejo $z \neq 0$, $\frac{z}{z} = 1$. *En efecto*: si $z = a + bi$,

$$\frac{z}{z} = \frac{aa + bb}{a^2 + b^2} - \frac{ba - ab}{a^2 + b^2} i = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} - \frac{0}{a^2 + b^2} i = 1 - 0i = 1.$$

Definición (1.6: conjugado)

El **conjugado** *de un número complejo $z = a + bi$ es otro número complejo, denotado usualmente por $\overline{z}$, y definido como*

$$\overline{z} = a - bi.$$

Ejemplo: Hallar los conjugados de $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4i$ y $z_3 = -5$.
Solución: Aplicando la definición anterior, obtenemos

$$\overline{z_1} = 2 - 3i, \quad \overline{z_2} = 4i \quad \text{y} \quad \overline{z_3} = -5.$$

Propiedades del conjugado de un número complejo

Si z y w son números complejos, entonces:

1. Si $z \in \mathbb{R}$, $\overline{z} = z$.
2. $\overline{\overline{z}} = z$
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
4. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
5. Si $z = a + bi$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Demostración: **Ejercicio!** (Como guía, ver dem. de la prop. 5 en pág. 10.)

Ejercicio: ¿Es cierto que $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$ cualesquiera sean $z, w \in \mathbb{C}$?

El concepto de conjugado junto con su propiedad 5, permiten obtener la forma binómica del **inverso multiplicativo de un número complejo** $z \neq 0$, denotado por z^{-1}. *En efecto*: si $z = a + bi$,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{z\overline{z}}\ \overline{z} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a - bi\right) = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Ejemplo: Calcular el inverso multiplicativo de $z = 2 - 3i$.
Solución: En nuestro caso, $a = 2$ y $b = -3$, entonces, aplicando la fórmula anterior,

$$z^{-1} = \frac{2}{2^2 + \left(-3\right)^2} - \frac{-3}{2^2 + \left(-3\right)^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$