CAPÍTULO 2

LÓGICA

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

CLASE 3

09/10/20

LEYES LÓGICAS o TAUTOLOGÍAS

Cuando una proposición compuesta es siempre verdadera, independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la conforman, se dice que es una **ley lógica** o **tautología**.

Ejemplo: La proposición $p \vee \sim p$ es una tautología.
En efecto:
• Si p es V, entonces la disyunción considerada también lo es.
• Si p es F, entonces $\sim p$ es V y, por lo tanto, la disyunción de ambas también es V.

Cuando una proposición compuesta es siempre falsa, independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la conforman, se dice que es una **contradicción**.

Ejemplo: La proposición $p \wedge \sim p$ es una contradicción.
En efecto:
• Si p es V, entonces $\sim p$ es F y, por lo tanto, la conjunción de ambas también es F.
• Si p es F, entonces la conjunción considerada también lo es.

Una forma de chequear que una proposición es una tautología (o una contradicción) es construyendo su tabla de verdad, en la cual su columna correspondiente debe resultar "verdadera" (o "falsa") en todos los casos posibles (es decir, en todas las filas).

Ejemplo: Las siguientes proposiciones son leyes lógicas que se usan frecuentemente para argumentar y demostrar resultados, por lo que reciben nombres específicos.

I. Modus Ponens: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

II. Modus Tollens: $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$

III. Silogismo hipotético de Aristóteles: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Construyamos la tabla de verdad de la proposición **I** (Modus Ponens):

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

Esta tabla muestra que $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ es una ley lógica, ya que es verdadera en todos los casos posibles, es decir, cualesquiera que sean los valores de verdad de p y q.

De manera análoga se puede mostrar que también las proposiciones **II** y **III** son leyes lógicas. (Las tablas de verdad correspondientes se pueden ver en las pág. 37 y 38.)

Observaciones:

- La negación de una tautología es una contradicción y viceversa.
- Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si y sólo si el bicondicional entre ellas es una tautología.

A continuación, se enlistan las equivalencias lógicas más utilizadas en el cálculo proposicional.

Nombre	**Equivalencia lógica**
Involución	$\sim(\sim p) \equiv p$
Idempotencia de la conjunción	$p \wedge p \equiv p$
Idempotencia de la disyunción	$p \vee p \equiv p$
Conmutativa de la conjunción	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Conmutativa de la disyunción	$p \vee q \equiv q \vee p$
Asociativa de la conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Asociativa de la disyunción	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Distributiva de la disy. resp. a la conj.	$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
Distributiva de la conj. resp. a la disy.	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Ley de Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
Ley de Morgan	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Contrarrecíproco	$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
Implicación	$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
Absorción	$(p \wedge q) \vee p \equiv p$
Absorción	$(p \vee q) \wedge p \equiv p$

Las equivalencias del cuadro anterior generan las siguientes tautologías.

Nombre	**Ley lógica**
Involución	$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la conjunción	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la disyunción	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Conmutativa de la conjunción	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Conmutativa de la disyunción	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Asociativa de la conjunción	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Asociativa de la disyunción	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributiva de la disy. resp. a la conj.	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
Distributiva de la conj. resp. a la disy.	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
Ley de Morgan	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
Ley de Morgan	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Ley del contrarrecíproco	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$
Ley de implicación	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Ley de absorción	$(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$
Ley de absorción	$(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$

Nota: Las equivalencias de los cuadros anteriores pueden considerarse "básicas" y se demuestran mediante tablas de verdad **(Ejercicio!)**.
Sin embargo, pueden ser utilizadas para demostrar que otras proposiciones son lógicamente equivalentes sin necesidad de construir tablas de verdad.

Ejemplo: Probaremos, sin usar tablas de verdad, las siguientes equivalencias lógicas.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$$

En efecto:

$$\sim (p \Rightarrow q) \overset{\text{L.Implic.}}{\equiv} \sim (\sim p \vee q) \overset{\text{L.Morgan}}{\equiv} \sim (\sim p) \wedge \sim q \overset{\text{Invol.}}{\equiv} p \wedge (\sim q)$$

Esto prueba la primer equivalencia. Por otra parte:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \overset{\text{L.Implic.}}{\equiv} (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) &\overset{\text{Distrib.}}{\equiv} (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\ &\overset{\text{L.Morgan}}{\equiv} \sim (p \vee q) \vee r \\ &\overset{\text{L.Implic.}}{\equiv} (p \vee q) \Rightarrow r \end{aligned}$$

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Definition (2.8)

Una **función proposicional** de una variable x es cualquier oración en la que figura x como sujeto o como objeto directo.

Representaremos a las funciones proposicionales por $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ ...

Una función proposicional se convierte en proposición para cada valor particular de x.

Ejemplo: Consideremos la siguiente función proposicional de x:

$$P(x) : \textit{Si } x^2 \textit{ es igual a } 9 \textit{ entonces } x \textit{ es igual a } 3.$$

Ejercicio: ¿Por qué $P(x)$ no es una proposición?

Simbólicamente:

$$P(x) : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

Cuando asignamos un valor particular a x, $P(x)$ se convierte en una proposición:

• Para $x = 3$, el condicional $P(3)$ tiene antecedente y consecuente verdaderos, por lo que es verdadero.

• Para $x = -3$, el condicional $P(-3)$ tiene antecedente verdadero y consecuente falso, por lo que es falso.

• Para cualquier $x \neq 3, -3$, el condicional $P(x)$ tiene antecedente falso (y consecuente falso), por lo que es verdadero. Así, por ejemplo, $P(0)$ es una proposición verdadera.

Otra forma de obtener proposiciones a partir de funciones proposicionales es mediante un proceso llamado **cuantificación**.

Cuantificadores

Los cuantificadores que se pueden asociar a una variable son:

- $\forall$ (se lee "*para todo*"), llamado **cuantificador universal**;
- $\exists$ (se lee "*existe*"), llamado **cuantificador existencial**.

Dada una función proposicional $P(x)$:

La proposición $\forall x : P(x)$ se lee

"*para todo* x *se cumple* $P(x)$"

y es verdadera si y sólo si todas las proposiciones particulares asociadas a $P(x)$ lo son.

La proposición $\exists x \ / \ P(x)$ se lee

"*existe* x *tal que* $P(x)$"

y es verdadera si y sólo si al menos una de las proposiciones particulares asociadas a $P(x)$ lo es.

Ejemplo: Consideremos nuevamente la función $P(x) : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$.

Si expresamos

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

estamos afirmando que

"todo número entero x cumple que si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$"

e.d., que "para todo número entero x, el condicional $P(x)$ es verdadero". Esta afirmación es una proposición y su valor de verdad es FALSO.

Si, en cambio, expresamos

$$\exists x \in \mathbb{Z} \; / \; x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$$

estamos afirmando que

"existe al menos un número entero x tal que si $x^2 = 9$ entonces $x = 3$"

e.d., que "para al menos un número entero x, el condicional $P(x)$ es verdadero". Esta afirmación también es una proposición y su valor de verdad es VERDADERO.

Negación de funciones proposicionales cuantificadas

- Para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial y se niega la función, es decir:

$$\sim [\forall x : P(x)] \equiv \exists x \ / \sim P(x)$$

- Para negar una función proposicional cuantificada existencialmente se cambia el cuantificador en universal y se niega la función, es decir:

$$\sim [\exists x \ / \ P(x)] \equiv \forall x :\sim P(x)$$

Ejemplos:

$$\sim \left(\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\right) \equiv \exists x \in \mathbb{Z} \ / \sim \left(x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\right)$$

$$\overset{\text{L. Implic.}}{\equiv} \exists x \in \mathbb{Z} \ / \sim \left(x^2 \neq 9 \vee x = 3\right)$$

$$\overset{\text{L. Morgan}}{\equiv} \exists x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 9 \wedge x \neq 3 \qquad \textbf{[V]}$$

$$\sim \left(\exists x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\right) \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : \sim \left(x^2 = 9 \Rightarrow x = 3\right) \equiv \ldots$$

$$\overset{\text{L. Implic.}}{\equiv} \forall x \in \mathbb{Z} :\sim \left(x^2 \neq 9 \vee x = 3\right)$$

$$\overset{\text{L. Morgan}}{\equiv} \forall x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \wedge x \neq 3 \qquad \textbf{[F]}$$

Leer páginas 42 y 43.

PRÁCTICA MÍNIMA SUGERIDA

Ejercicios:

9 {b), c)}, 10, 16, 17, 18 (matemáticos), 19 {b), c), e)}

20 {a), b), d)}, 21, 22.

(páginas 46 y 47)