CAPÍTULO 2

LÓGICA

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

CLASE 2

05/10/20

Operaciones con proposiciones: condicionales

Sean p y q dos proposiciones.

- En el lenguaje coloquial la expresión "*si* p *entonces* q" supone tácitamente que hay una relación de causa y efecto entre p y q.
- En lógica un condicional se emplea en un sentido más débil: "*si* p *entonces* q" simplemente afirma que si p es verdadera, q también.

Definición (2.5)

El **condicional** *de las proposiciones* p *y* q*, denotado por* $p \Rightarrow q$ *(se lee "si* p *entonces* q*"), es la proposición que sólo es falsa cuando* p *es verdadera y* q *es falsa. A* p *se le llama* **antecedente** *y a* q*,* **consecuente***.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Ejemplo: Supongamos que un político promete:

"Si salgo electo entonces los impuestos serán más bajos el próximo año."

Esta declaración se puede descomponer mediante las proposiciones:

p : *Salgo electo.*

q : *Los impuestos serán más bajos el próximo año.*

De este modo, el antecedente es p y el consecuente es q.

Ahora, analicemos la verdad (V) o falsedad (F) de este condicional, el cual puede pensarse como un compromiso condicionado por p.

• Si p es V y q es V, la promesa se cumple y el condicional es VERDADERO.

• Si p es V y q es F, la promesa no se cumple y el condicional es FALSO.

• Si p es F, el político queda liberado del compromiso surgido de su promesa e, idependientemente de como varíen los impuestos, no lo consideraremos un mentiroso. Por lo tanto, podemos asumir que el condicional es VERDADERO

Operaciones con proposiciones: condicionales

Como vimos antes con respecto a la negación, también hay varias maneras diferentes de expresar coloquialmente un condicional.

Ejemplo: Consideremos nuevamente el condicional del ejemplo anterior:

"Si salgo electo entonces los impuestos serán más bajos el próximo año."

Esta declaración se podría haber expresado mediante cualquiera de las siguientes proposiciones (entre otras):

- *"Si salgo electo, los impuestos serán más bajos el próximo año."*
- *"Los impuestos serán más bajos el próximo año si salgo electo."*

Observación: En la primer caso, se enfatiza el antecedente, mientras que en el segundo se destaca el consecuente.

Operaciones con proposiciones: condicionales

Proposición (2.2)

$p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\sim p \vee q$.

Demostración: Se debe verificar que ambas proposiciones tienen la misma tabla de verdad, es decir, que en todos los casos posibles tienen el mismo valor de verdad. En efecto:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

Por lo tanto, ambas proposiciones son lógicamente equivalentes ■

A continuación, veremos otras equivalencias lógicas para el condicional.

Condicionales asociados

Dado el condicional $p \Rightarrow q$ diremos que:

- $q \Rightarrow p$ es su (condicional) **recíproco**.
- $\sim p \Rightarrow \sim q$ es su (condicional) **contrario**.
- $\sim q \Rightarrow \sim p$ es su (condicional) **contrarrecíproco**.

Ejemplo: Consideremos el condicional:

$p \Rightarrow q$: *Si está lloviendo entonces hay nubes en el cielo.*

Se trata de una proposición VERDADERA.

• Su proposición recíproca: *si hay nubes en el cielo entonces está lloviendo,* puede ser VERDADERA o FALSA.

• Su proposición contraria: *si no está lloviendo entonces no hay nubes en el cielo, puede ser VERDADERA o FALSA.*

• Su proposición contrarrecíproca: *si no hay nubes en el cielo entonces no está lloviendo*, es VERDADERA.

El hecho de que en el ejemplo anterior la proposición original y su contrarrecíproca tengan el mismo valor de verdad no es casualidad...

El siguiente resultado muestra la relación entre los distintos condicionales asociados.

Proposición (2.3)

La proposición condicional $p \Rightarrow q$ y su contrarrecíproca, $\sim q \Rightarrow \sim p$, son lógicamente equivalentes.

Demostración: Se debe verificar que ambas proposiciones tienen la misma tabla de verdad, es decir, que en todos los casos posibles tienen el mismo valor de verdad. En efecto:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	V	F	**F**
F	V	**V**	F	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

Por lo tanto, ambas proposiciones son lógicamente equivalentes ■

Definición (2.6)

Si $p \Rightarrow q$ es siempre verdadero, diremos que es una **implicación**, *y que p es* **condición suficiente** *para q y q es* **condición necesaria** *para p.*

Ejemplo: Consideremos el condicional:

Si un número es múltiplo de 6, *entonces es múltiplo de* 3.

El antecedente es p : *Un número es múltiplo de* 6.
El consecuente es q : *Un número es múltiplo de* 3.
Sabemos que nunca se dará el caso de que un número sea múltiplo de 6 (p verdadera) y no de 3 (q falsa). Por lo tanto, el condicional dado es SIEMPRE VERDADERO, es decir, es una implicación, y se puede expresar mediante cualquiera de las siguientes afirmaciones (entre otras):

- *Que un número sea múltiplo de* 6 *implica que es múltiplo de* 3.
- *Que un número sea múltiplo de* 6 *es condición suficiente para que sea múltiplo de* 3.
- *Que un número sea múltiplo de* 3 *es condición necesaria para que sea múltiplo de* 6.
- *Un número es múltiplo de* 6 *sólo si es múltiplo de* 3.

Definición (2.7)

El **bicondicional** *entre las proposiciones p y q, denotado por $p \Leftrightarrow q$ (se lee "p si y sólo si q"), es la proposición que es verdadera sólo cuando p y q son ambas verdaderas, o bien, ambas falsas.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Ejemplo: Consideremos las proposiciones simples p y q del ejemplo anterior. El bicondicional entre ellas es:

$p \Leftrightarrow q$: *Un número es múltiplo de* 6 *si y sólo si es múltiplo de* 3.

Esta proposición podría ser VERDADERA o FALSA, ya que puede darse el caso de que un número sea múltiplo de 3 (q verdadera) y no de 6 (p falsa), como ocurre, por ejemplo, para el número 9.

Proposición

El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es lógicamente equivalente a la conjunción del condicional $p \Rightarrow q$ y su recíproco, $q \Rightarrow p$, es decir, a la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Demostración: Se debe verificar que ambas proposiciones tienen, en todos los casos posibles, el mismo valor de verdad. A tal fin, construimos las tablas de verdad correspondientes:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**F**
F	V	V	F	**F**
F	F	V	V	**V**

Por lo tanto, las proposiciones $p \Leftrightarrow q$ y $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ son lógicamente equivalentes ■

Observación: En virtud de la proposición anterior, cuando el bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es verdadero, también lo es la conjunción $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, lo cual implica que son verdaderos ambos condicionales, $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$.

Definición

Si el bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es siempre verdadero, diremos que se trata de una **biimplicación** *o* **doble implicación**, *y que p es* **condición necesaria y suficiente** *para q.*

Ejemplo: Modifiquemos ligeramente el bicondicional del ejemplo anterior:

Un número es múltiplo de 6 si y sólo si es múltiplo de 2 y de 3.

Sabemos que no puede darse el caso de que un número sea múltiplo de 6 sin serlo también de 2 y de 3; tampoco podría ser múltiplo de 2 y de 3 simultáneamente sin ser divisible entre 6. Por lo tanto, el bicondicional dado es una doble implicación, ya que es SIEMPRE VERDADERO, y una forma alternativa de expresarlo es:

Que un número sea múltiplo de 6 es condición necesaria y suficiente para que sea múltiplo de 2 y de 3.

PRÁCTICA MÍNIMA SUGERIDA:

Ejercicios

5 {d), g), h)}, 6, 7, 8 {a), b)}, 13, 14, 15

(pág. 45/46)