CAPÍTULO 2

LÓGICA

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

CLASE 1

02/10/20

La **lógica** es una disciplina que estudia la estructura o formas del pensamiento humano (tales como conceptos, proposiciones y razonamientos) con el objeto de establecer leyes y principios válidos para obtener criterios de verdad.

Esta disciplina tiene importantes aplicaciones prácticas tanto en la vida cotidiana como en todas las ramas de las ciencias:

- Nos proporciona las reglas por medio de las cuales podemos determinar cuando un argumento es válido.
- Sus reglas se utilizan en la escritura de programas de computación.
- Juega un papel fundamental en el diseño de circuitos digitales.
- En matemáticas es fundamental para la deducción o demostración de resultados.

Los objetos básicos de la lógica son las proposiciones.

PROPOSICIONES

En lógica, una **proposición** es una aserción o expresión declarativa, en lenguaje coloquial escrito o hablado, que puede ser cierta o falsa, pero no ambas a la vez.

Ejemplo

Oraciones que son proposiciones:

- *Mi computadora es negra.*
- 5 *es un número primo.*
- *Hoy es viernes y mañana es lunes.*

Oraciones que no son proposiciones:

- *¿Qué hora es?*
- *Deténgase.*
- *¡Qué hermoso jardín!*

Generalmente, utilizaremos las letras p, q, r, s, ... para representar las proposiciones.

Proposiciones simples vs. compuestas

Diremos que:

- Una proposición es **simple** si no puede dividirse para su análisis en expresiones declarativas más sencillas.
- Una proposición es **compuesta** si está conformada por dos o más proposiciones simples unidas mediante ciertos conectores llamados "conectivos lógicos".

En el **ejemplo anterior**, las dos primeras proposiciones son simples y la tercera es compuesta.

Otros ejemplos

Consideremos las proposiciones simples:

p : *El semáforo está verde.* y q : *Los autos pueden avanzar.*

Con ellas se pueden construir, por ej., las sig. proposiciones compuestas:

- *El semáforo está verde* o *los autos no pueden avanzar.* [p o no q]
- *El semáforo no está verde* y *los autos pueden avanzar.* [(no p) y q]
- *Si el semáforo está verde* entonces *los autos pueden avanzar.* [si p, q]

Proposiciones simples vs. compuestas

Consideremos ahora la proposición compuesta:

Todo número natural que es múltiplo de 6 *es múltiplo de* 2 *y de* 3.

Las proposiciones simples que la componen son:

- p : *Todo número natural es múltiplo de* 6.
- q : *Todo número natural es múltiplo de* 2.
- r : *Todo número natural es múltiplo de* 3.

Así, la proposición compuesta dada puede expresarse como:

$$[\text{si } p \text{ entonces } (q \text{ y } r)]$$

y es VERDADERA.

En cambio, por ejemplo, la proposición compuesta

$$[p \text{ y } q \text{ y } r]$$

resulta FALSA.

Tablas de verdad

Observación: En los ejemplos previos, el valor de verdad de cada proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la conforman y de los conectivos lógicos mediante los cuales estas se combinan. **Esto es cierto en general...**
Por lo tanto:

> Cuando no se conozcan los valores de verdad de las proposiciones simples que conforman una proposición compuesta, para analizar el valor de verdad de esta, será necesario considerar todos los casos posibles. Una forma práctica de hacer este análisis es construyendo una **"tabla de verdad"**.

- Se puede demostrar (aunque no lo haremos) que si una proposición compuesta consiste de n proposiciones simples cuyos valores de verdad se desconocen, hay 2^n casos posibles.
- Diremos que dos proposiciones compuestas son **lógicamente equivalentes** si tienen la misma tabla de verdad.

Operaciones con proposiciones

Definición (2.1)

La **negación** *de una proposición p, denotada por $\sim p$ (se lee "no p"), es la proposición que es verdadera cuando p es falsa y falsa cuando p es verdadera.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Hay varias maneras diferentes de expresar coloquialmente la negación de un enunciado o proposición, como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Consideremos la proposición:

$$p : \textit{Todo hombre es honesto.}$$

La negación de p es:

$$\sim p : \textit{No todo hombre es honesto.}$$

o bien, cualquiera de las siguientes proposiciones (entre otras):

$\sim p$: *No es cierto que todo hombre es honesto.*

$\sim p$: *Hay hombres que no son honestos.*

$\sim p$: Existen hombres *deshonestos.*

Operaciones con proposiciones

Proposición (2.1)

$\sim (\sim p)$ *es lógicamente equivalente a* p*.*

Demostración: Se debe verificar que ambas proposiciones tienen la misma tabla de verdad, es decir, que en todos los casos posibles tienen el mismo valor de verdad. En efecto:

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
V	F	V
F	V	F

Por lo tanto, las proposiciones p y $\sim (\sim p)$ son lógicamente equivalentes ■

A continuación, definiremos las proposiciones compuestas básicas que surgen de la aplicación de los conectivos lógicos a dos proposiciones simples. Luego, las utilizaremos para analizar proposiciones compuestas más complejas.

Definición (2.2)

La **conjunción** *de las proposiciones p y q, denotada por $p \wedge q$ (se lee "p y q"), es la proposición que es verdadera cuando ambas son verdaderas, y es falsa cuando al menos una de ellas es falsa.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Ejemplo: Dadas la proposiciones:

$$p : 3 \textit{ es un número impar.} \quad \text{y} \quad q : 8 \textit{ es un número impar.}$$

La conjunción de ambas es:

$$p \wedge q : 3 \textit{ y } 8 \textit{ son números impares.}$$

Nótese que $p \wedge q$, en este caso particular, es una proposición FALSA.

Definición (2.3)

La **disyunción** *de las proposiciones p y q, denotada por $p \vee q$ (se lee "p o q"), es la proposición que es verdadera cuando al menos una de ellas es verdadera, y es falsa cuando ambas son falsas.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \vee q$
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Ejemplo: Consideremos nuevamente las proposiciones del ej. anterior:

p : 3 *es un número impar.* y q : 8 *es un número impar.*

La disyunción de ambas es:

$p \vee q$: 3 *u* 8 *son números impares.*

Nótese que $p \vee q$, en este caso particular, es VERDADERA.

Nota: La palabra "o" también suele utilizarse en un sentido fuerte o excluyente, en cuyo caso su significado no es "al menos uno" sino "uno y sólo uno".

Definición (2.4)

La **diferencia simétrica** *de las proposiciones p y q, denotada por* $p \veebar q$ *(se lee "p o bien, q"), es la proposición que sólo es verdadera cuando una o la otra es verdadera, pero no ambas.*

La tabla de verdad correspondiente es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Ejemplo: Consideremos la proposición:

El lunes viajaré a Bs. As. en colectivo o en avión.

La misma, se puede descomponer mediante las proposiciones:

p : *El lunes viajaré a Bs. As. en colectivo.*

q : *El lunes viajaré a Bs. As. en en avión.*

Claramente, p y q no pueden ser ambas ciertas, y la proposición dada se puede expresar como $p \veebar q$.

PRÁCTICA MÍNIMA SUGERIDA:

Ejercicios 1, 2, 3, 5 a) y c) [pág. 44/45]