UNIDAD 3 (2° parte)

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

Una anécdota a modo de introducción...

Se dice que el gran matemático, físico y astrónomo alemán *Karl Friedrich Gauss* encontró, siendo un niño, la fórmula para calcular la suma de los primeros 100 números naturales... Corría el año 1789, cuando su profesor, a fin de mantenerlo entretenido un buen rato en el salón de clases, le pidió que calculara el total de dicha suma, pero a Gauss se le ocurrió un procedimiento para resolverla rápidamente.

1° Ordenó los números del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \ldots & 53 & 52 & 51 \end{array}$$

2° Observó que habían en total 50 columnas y que, si sumaba cada pareja de números en la misma columna, obtenía siempre el mismo valor:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 48 & 49 & 50 \\ \underline{100} & \underline{99} & \underline{98} & \ldots & \underline{53} & \underline{52} & \underline{51} \\ 101 & 101 & 101 & \ldots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

3° Concluyó, entonces, que el resultado buscado surgiría de sumar 50 veces el número 101, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = (50)\,(101) = 5050$$

Notación: En general, para sumas con n términos, es usual abreviar su escritura mediante el símbolo "*sumatoria*", de la siguiente manera:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Utilizando esta notación, la **suma de Gauss** se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + ... + 100 = (50)\,(101) = \frac{100}{2}(100+1)$$

Observaciones:

- En este caso, $n = 100$ y $a_i = i$ para cada $i = 1, 2, ..., 100$.
- La solución se ha podido expresar en función de la cantidad de términos.

Si consideramos ahora la suma de los n primeros números naturales (sin especificar un valor para n), cabe preguntarnos si es posible calcularla aplicando una fórmula análoga... Esto es: **¿** Cualquiera sea la cantidad n de términos, ocurrirá que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1) \text{ ?}$$

La fórmula anterior es una *función proposicional* de la variable n, digamos

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

Entonces, nuestra pregunta podría reformularse como sigue:

¿ Es posible verificar que $P(n)$ genera una proposición verdadera para cada valor particular del número natural n ?

o, equivalentemente:

¿ Es posible demostrar la veracidad de la proposición "*para todo número natural n se satisface $P(n)$*" ?

La respuesta es sí... pero chequear la validez de $P(n)$ para cada uno de los infinitos valores de n es imposible, por lo que surge otra pregunta:

¿ Cómo podríamos hacerlo ?

El **Principio de Inducción Matemática** es un "axioma" (es decir, una verdad universal que, debido a su evidencia, no necesita ser probado) que nos provee un método para tal demostración.

Principio de Inducción Matemática:

Sea n_0 un número entero. Una función proposicional $P(n)$ es válida para todo número entero $n \geq n_0$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. $P(n_0)$ es una proposición verdadera (*paso base*).

2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ resulta una proposición verdadera (implicación) cualquiera sea el número entero $n \geq n_0$ (*paso inductivo*).

EJEMPLO (3.8): Demostraremos, mediante el Principio de Inducción la validez de la **generalización de la suma de Gauss**, es decir, que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textit{para todo } n \textit{ en } \mathbb{N}.$$

Aplicaremos dicho principio, en este caso, con $n_0 = 1$ y

$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Paso base: Verificaremos que la proposición $P(1)$ es verdadera. En efecto:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

lo que muestra que la igualdad se cumple para $n = 1$.

Paso inductivo: Probaremos que, cualquiera sea n en $\mathbb{N}$ $(n \geq 1)$, el condicional $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ es una implicación. En efecto:

HIPÓTESIS INDUCTIVA [suponemos verdadera $P(n)$]: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

TESIS INDUCTIVA [d.p. la veracidad de $P(n+1)$]: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{\textbf{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Conclusión: Dado que, $P(1)$ es verdadera y, bajo la supuesta validez de $P(n)$ hemos comprobado la de $P(n+1)$, concluimos, por el *Principio de Inducción Matemática*, que la fórmula vale para todo número natural n ■