UNIDAD 4

CONJUNTOS

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

CARDINALIDAD

Definición (4.1)

La cardinalidad de un conjunto A, denotada por $|A|$ o por $\#A$, es el número o cantidad de elementos (distintos) que lo conforman.

Ejemplo: Si $V = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $|V| = 5$ (o $\#V = 5$).

Dado un conjunto A:

- Si A tiene un único elemento ($|A| = 1$), se dice que A es un **conjunto unitario**.
- Si A no tiene elementos ($|A| = 0$), se dice que A es el **conjunto vacío**, el cual se denota por $\emptyset$ ($A = \emptyset$).
- A puede tener **cardinalidad "infinita"**.

Ejemplo: A continuación se presentan varios conjuntos definidos coloquialmente por comprensión. Expresar a cada uno de ellos simbólicamente por comprensión y, de ser posible, por extensión; luego, dar su cardinalidad.

1. A es el conjunto de los números reales cuyo cuadrado es igual a -1.
- *Simbólicamente*: $\{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 = -1\}$
- *Por extensión*: No se puede, ya que A no tiene elementos ($A = \emptyset$).
- *Cardinalidad*: $|A| = 0$.

2. A es el conjunto de los números complejos cuyo cuadrado es igual a -1.
- *Simbólicamente*: $\{x \in \mathbb{C} \;/\; x^2 = -1\}$
- *Por extensión*: $\{-i, i\}$
- *Cardinalidad*: $|A| = 2$.

3. A es el conjunto de los números naturales mayores que 2.
- *Simbólicamente*: $\{x \in \mathbb{N} \;/\; x > 2\}$
- *Por extensión*: No se puede... (Por abuso de notación: $\{3, 4, 5, \ldots\}$)
- *Cardinalidad*: Infinita.

4. A es el conjunto de los núm. reales mayores que 2 que no superan 6.
- *Simbólicamente*: $\{x \in \mathbb{R} \;/\; 2 < x \leq 6\}$
- *Por extensión*: No se puede...
- *Cardinalidad*: Infinita.

DIAGRAMAS DE VENN

CONJUNTOS clase 1 2020: pág. 11/19, 12/19 y 13/19.

SUBCONJUNTOS

Definition (4.2)

Dados dos conjuntos A y B, se dice que "A está **incluido** en B", o que "A es un **subconjunto** de B", cuando todos los elementos de A son también elementos de B. En este caso, se escribe: $A \subseteq B$.

Simbólicamente la definición anterior se puede expresar como:

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

Ejemplos:

• $\mathbb{N}$ está incluido en $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$).

• $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), ya que podemos considerar que consiste, precisamente, de los números complejos (elementos de $\mathbb{C}$) cuya parte imaginaria es igual a 0.

• $\{a, e, i, o, u\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$

Números combinatorios y Binomio de Newton

Dado un conjunto A con cardinalidad finita n, la proposición anterior (que se demostrará más adelante) responde a la pregunta:

- **¿Cuántos subconjuntos de A se pueden formar en total?**

No obstante, en determinados contextos, podríamos necesitar información más precisa y preguntarnos, por ejemplo:

- **¿Cuántos subconjuntos de A con exactamente r elementos se pueden formar?**

La pregunta anterior tiene sentido para cada $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ y, con miras a responderla, introducimos la siguiente definición...

Definición (4.8)

Dados dos números enteros no negativos, digamos r y n, tales que $r \leq n$, se define el **número combinatorio** *"n tomados de r" por:*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ejemplos:

- 5 tomados de 3 $[n = 5,\ r = 3]$:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1.2.3.4.5}{(1.2.3)\,(1.2)} = \frac{120}{6.2} = \frac{120}{12} = 10$$

- 4 tomados de 4 $[n = 4,\ r = 4]$:

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Otro ejemplo: Reconsideremos el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Entonces, $|A| = 3$ y, como vimos en un ejemplo anterior, hay...

- 1 subconjunto de A con cardinalidad 0: $\emptyset$
  Observación: $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1$
- 3 subconjuntos de A con cardinalidad 1: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
  Observación: $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3$
- 3 subconjuntos de A con cardinalidad 2: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
  Observación: $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$
- 1 subconjunto de A con 3 elementos: A
  Observación: $\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1$

Lo observado en el ejemplo anterior no es casualidad... De hecho, se puede demostrar, mediante un argumento inductivo, lo siguiente:

> Para un conjunto A de cardinalidad n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), la cantidad de subconjuntos diferentes con cardinalidad r, para cada $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, es, precisamente, $\binom{n}{r}$.

Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, los números combinatorios que se pueden formar son:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

y es fácil chequear (**ejercicio!**) que satisfacen las siguientes **propiedades:**

1. Si $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Teniendo en cuenta estas propiedades, los números combinatorios para diferentes (y sucesivos) valores de n, pueden disponerse mediante un arreglo triangular que simplifica sus cálculos y se conoce con el nombre de **Triángulo de Pascal**:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 \blacktriangleright & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 \blacktriangleright & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 \blacktriangleright & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 \blacktriangleright & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 \blacktriangleright & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 \vartriangleright & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 \blacktriangleright & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 \blacktriangleright & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 \blacktriangleright & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 \blacktriangleright & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 \blacktriangleright & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 \vartriangleright & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Observación: Los resultados obtenidos en el ejemplo anterior coinciden con los números en la fila correspondiente a $n = 3 = |A|$.

Teniendo en cuenta estas propiedades, los números combinatorios para diferentes (y sucesivos) valores de n, pueden disponerse mediante un arreglo triangular que simplifica sus cálculos y se conoce con el nombre de **Triángulo de Pascal**:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 \blacktriangleright & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 \blacktriangleright & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 \blacktriangleright & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
\color{purple}{n=3 \blacktriangleright} & & & \color{purple}{\binom{3}{0}} & & \color{purple}{\binom{3}{1}} & & \color{purple}{\binom{3}{2}} & & \color{purple}{\binom{3}{3}} & & \\
n=4 \blacktriangleright & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 \triangleright & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

o, equivalentemente,

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 \blacktriangleright & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 \blacktriangleright & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 \blacktriangleright & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\color{purple}{n=3 \blacktriangleright} & & & \color{purple}{1} & & \color{purple}{3} & & \color{purple}{3} & & \color{purple}{1} & & \\
n=4 \blacktriangleright & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 \triangleright & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Observación: Los resultados obtenidos en el ejemplo anterior coinciden con los números en la fila correspondiente a $n = 3 = |A|$.

Una de las aplicaciones más interesantes de los números combinatorios y el Triángulo de Pascal radica en el desarrollo (o expansión) de la **potencia de un binomio** o **Binomio de Newton** y se vuelca en el siguiente teorema...

Teorema (4.2)

Si a y b representan números reales, para todo número entero no negativo n se cumple que

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Demostración: Se puede realizar por *Inducción Matemática* sobre n... Se deja como **ejercicio!**

Ejemplo: Al desarrollar el *Binomio de Newton* para $n = 3$, se obtiene la fórmula del *cuatrinomio cubo perfecto*. En efecto:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \textstyle\sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r} a^{3-r} b^r \\ &= \binom{3}{0} a^{3-0} b^0 + \binom{3}{1} a^{3-1} b^1 + \binom{3}{2} a^{3-2} b^2 + \binom{3}{3} a^{3-3} b^3 \\ &= 1a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + 1a^0 b^3 \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Definición (4.10)

Dados dos conjuntos, A y B, el **producto cartesiano** *de A con B (o, de A y B), denotado como $A \times B$, es el conjunto consistente de todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A, y la segunda, un elemento de B.*

Simbólicamente:

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \ / \ x \in A \wedge y \in B\}}$$

Ejemplos:

- Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces:
  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
  $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
- Si $A = \{1\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 5\}$, entonces:
  $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
  $B \times A = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

Observaciones: En general...

- $|A \times B| = |B \times A|$
- Si $A \neq B$, $A \times B \neq B \times A$.
- $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (y, x) \in B \times A$