UNIDAD 4

CONJUNTOS

Bibliografía principal:

Álgebra y Geometría Analítica
(Edición 2017)

Patricia Galdeano
Jorge Oviedo
María Isabel Zarkowicz

www.evirtual.unsl.edu.ar/moodle/course/index.php?categoryid=17

CONJUNTOS Y SUS ELEMENTOS

Intuitivamente y a grandes rasgos, podemos pensar que un **conjunto** es una colección de "objetos" que tienen una determinada característica en común.

Es usual referirse (y así lo haremos) a los "objetos" que conforman un conjunto como **elementos** o **miembros** del mismo.

> En matemática, el alemán Georg Cantor [1845 - 1918] formuló la **teoría de conjuntos** entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, y su principal objetivo era el de formalizar dicha ciencia.

En lo que sigue, utilizaremos generalmente:

- letras mayúsculas para denotar conjuntos,
- letras minúsculas para representar elementos.

Si A representa un conjunto y x un objeto, se escribe:

$x \in A$ para simbolizar la proposición

"*x es un elemento del conjunto A*"

(o "*x es un elemento de A*"),

la cual puede expresarse también como

"x pertenece al conjunto A"

(o "x pertenece a A").

$x \notin A$ para simbolizar su negación.

EJEMPLOS:

• Si H representa el conjunto de todos los seres humanos y d, la persona "Diego Reyes", podemos escribir: $d \in H$.

• Si C representa el conjunto de todos los colores y a, el color amarillo, podemos escribir: $a \in C$.

• Conservando la notación de los ejemplos anteriores, podemos también escribir (simbólicamente): $a \notin H$ y $d \notin C$.

CONJUNTO DE REFERENCIA

Muchas veces, un conjunto se define seleccionando elementos de otro conjunto de referencia, llamado usualmente **conjunto referencial** o **conjunto universal**. Este se fija de antemano y consiste de todos los elementos que intervienen en el tema de interés.

En general, cuando no esté especificado, denotaremos el conjunto universal (o referencial) por $\mathcal{U}$.

EJEMPLO: Sea A el conjunto conformado por todos los números enteros menores que 2.

Entonces, A se define seleccionando los elementos del conjunto referencial $\mathbb{Z}$ ($\mathcal{U} = \mathbb{Z}$) que tienen en común la característica de ser menores que 2.

Observación: Otra alternativa (entre muchas más) es considerar que A se define seleccionando los números reales que comparten la propiedad de ser enteros y menores que 2, en cuyo caso el conjunto referencial es $\mathbb{R}$.

Los conjuntos se pueden describir de dos maneras:

- **Por extensión**, enumerando uno a uno todos sus elementos.
- **Por comprensión**, indicando un conjunto referencial y la/s propiedad/es que caracteriza/n a sus elementos.

Observación: Sólo los conjuntos finitos se pueden definir por extensión.

En el segundo caso (por comprensión): si A es el conjunto que consiste de todos los elementos de un universal $\mathcal{U}$ que verifican cierta propiedad, la cual es señalada mediante una función proposicional $P(x)$, se expresa simbólicamente como sigue:

$$\boxed{A = \{x \in \mathcal{U} \ / \ P(x)\}}$$

lo cual indica que

$$a \in A \Leftrightarrow P\,(a) \ es \ verdadera$$

mientras que

$$a \notin A \Leftrightarrow P\,(a) \ es \ falsa$$

EJEMPLOS

• Sea V el conjunto conformado por todas las vocales.
Si representamos por $\mathcal{U}$ al conjunto consistente de todas las letras del abecedario y lo tomamos como referencia de V, **por comprensión:**

$$V = \{x \in \mathcal{U} \ / \ x \ es \ una \ vocal\}$$

En este caso, $P(x)$: "*x es una vocal*" y tenemos, por ejemplo, que...
$a \in V$, ya que la proposición $P(a)$: "*a es una vocal*" es verdadera.
$c \notin V$, ya que la proposición $P(c)$: "c es una vocal" es falsa.
El conjunto V se puede definir también **por extensión:**

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

• Consideremos, nuevamente, el conjunto A conformado por todos los números enteros menores que 2.
Algunas maneras de representar a A **por comprensión:**

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x < 2\} \quad \text{o} \quad A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \text{ es entero y } x < 2\}$$

El conjunto A **no** se puede definir **por extensión...** Sin embargo, en casos como este, suelen aparecer "abusos de notación" tales como:

$$A = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

pero esta no es propiamente una representación por extensión.

CARDINALIDAD

Definición (4.1)

La cardinalidad de un conjunto A, denotada por $|A|$ o por $\#A$, es el número o cantidad de elementos (distintos) que lo conforman.

Ejemplo: Si $V = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $|V| = 5$ (o $\#V = 5$).

Dado un conjunto A:

- Si A tiene un único elemento ($|A| = 1$), se dice que A es un **conjunto unitario**.
- Si A no tiene elementos ($|A| = 0$), se dice que A es el **conjunto vacío**, el cual se denota por $\emptyset$ ($A = \emptyset$).
- A puede tener **cardinalidad "infinita"**.

DIAGRAMAS DE VENN

CONJUNTOS clase 1 2020: pág. 11/19, 12/19 y 13/19.

SUBCONJUNTOS

Definition (4.2)

Dados dos conjuntos A y B, se dice que "A está **incluido** en B", o que "A es un **subconjunto** de B", cuando todos los elementos de A son también elementos de B. En este caso, se escribe: $A \subseteq B$.

Simbólicamente la definición anterior se puede expresar como:

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

Ejemplos:

• $\mathbb{N}$ está incluido en $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$).

• $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$), ya que podemos considerar que consiste, precisamente, de los números complejos (elementos de $\mathbb{C}$) cuya parte imaginaria es igual a 0.

• $\{a, e, i, o, u\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$

Proposición (4.1)

Para todo conjunto A se verifica que $A \subseteq A$ y $\emptyset \subseteq A$.

Demostración: Por la definición (4.2), para todo par de conjuntos A y B,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Entoces (tomando $B = A$), consideremos la proposición

$$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in A)$$

Cualquiera sea el conjunto A, esta proposición es *verdadera*, ya que el condicional $x \in A \Rightarrow x \in A$ lo es para todo posible valor de x ($p \Rightarrow p$ es una tautología). Luego, en virtud del bicondicional anterior, esto significa que $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

Por otra parte, (tomando $A = \emptyset$ y $B = A$) analicemos la proposición

$$\forall x : (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

Nuevamente, cualquiera sea el conjunto A, resulta *verdadera*, ya que el condicional $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ tiene antecedente falso (y es, por lo tanto, verdadero) para todo posible valor de x. Se sigue, entonces, la veracidad de $\emptyset \subseteq A$ para todo conjunto A ■

Definición (pág. 73)

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales cuando A est a incluido en B y B está incluido en A, es decir, cuando tienen exactamente los mismos elementos. En este caso se escribe: $A = B$.

Simbólicamente:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq B)}$$

Ejemplos:

- $\{a, e, i, o, u\} = \{a, e, i, o, u\}$
- $\{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| = 1\}$
- $\{1\} \neq \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| = 1\}$

Ejercicio: Teniendo en cuenta esta definición y la proposición anterior, demostrar que el conjunto vacío es único (*ver pág.* 74).

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se dice que "A est a **estrictamente incluido** *en B", o que "A es un* **subconjunto propio** *de B", cuando A está incluido en B pero no es igual a B. En este caso, se escribe: $A \subset B$ o $A \subsetneq B$.*

Simbólicamente:

$$\boxed{A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)}$$

Ejemplos:

• $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, ya que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ pero, por ejemplo, -1 es un elemento de $\mathbb{Z}$ y no de $\mathbb{N}$, por lo que $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$.

• $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

• $\{a, e, i, o, u\} = \{a, b, c, d, ..., x, y, z\}$

• $\{1\} \neq \{x \in \mathbb{Z} \ / \ |x| = 1\}$

Ejercicio: Justificar las inclusiones estrictas de los dos últimos ejemplos.

Proposición (Lema 4.1)

Dados dos conjuntos A y B, A **no** *es subconjunto de B si y sólo si contiene al menos un elemento no perteneciente a B. En este caso se escribe: $A \nsubseteq B$.*

Simbólicamente: $\boxed{A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A \wedge x \notin B)}$

Demostración: **Ejercicio** (ver en la pág. 73) ■

Definición (4.4)

Se dice que dos conjuntos A y B son **disjuntos** *si no tienen elementos en común.*

Simbólicamente: $\boxed{A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow \nexists x : (x \in A \wedge x \in B)}$

Ejemplos:

• Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son disjuntos, ya que, por ejemplo, el número 1 es elemento de ambos.

• Los intervalos de números reales $(-10, 0) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -10 < x < 0\}$ y $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x\}$ son conjuntos disjuntos.