UNIDAD 3
INTEGRALES MÚLTIPLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

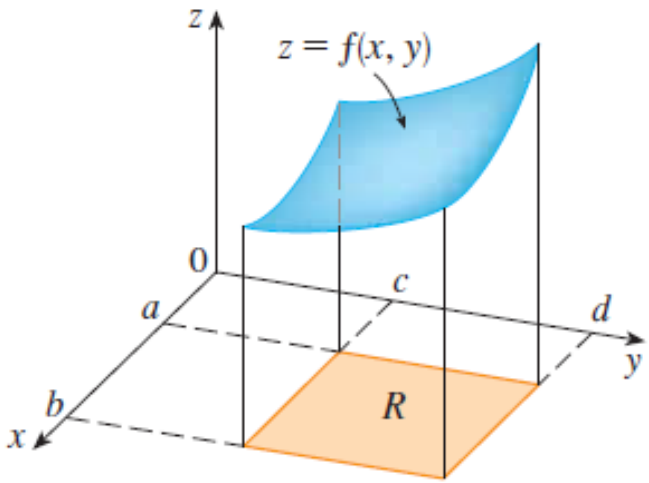
VOLÚMENES

Sea f una función de dos variables definida sobre un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

La gráfica de f es una **superficie** con ecuación

$$z = f(x, y)$$



Supongamos, por ahora, que

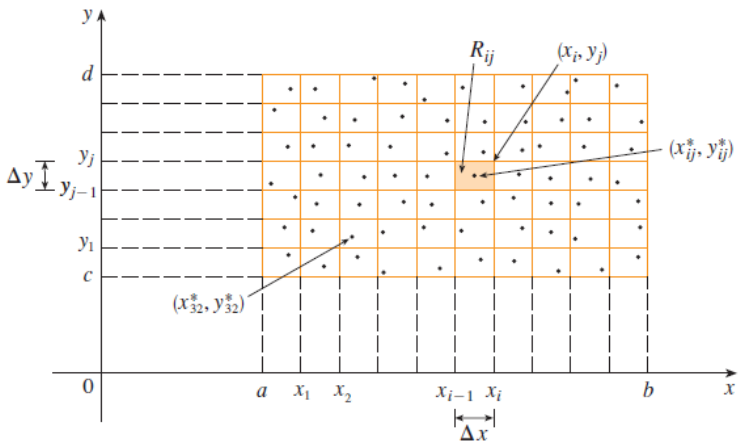
$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R$$

Sea S el **sólido** que se forma por encima de R y por debajo de S:

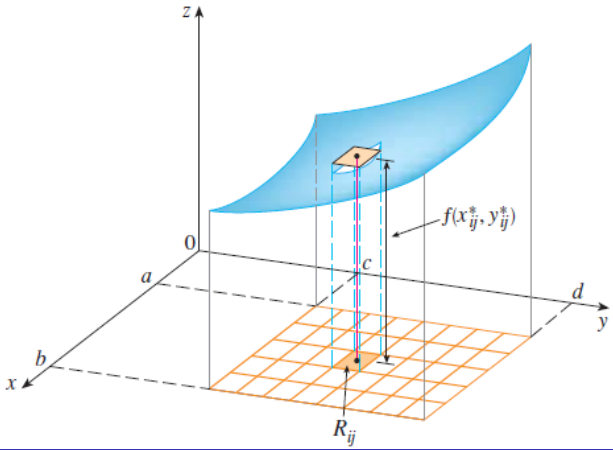
$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in R,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Nuestro próximo objetivo es hallar el **volumen** de S.

- Se divide el rectángulo R en subrectángulos.
  - Se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud $\Delta x = (b - a) / m$.
  - Se divide el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual longitud $\Delta y = (d - c) / n$.
- Se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados por los puntos extremos de estos subintervalos, formando así los subrectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$

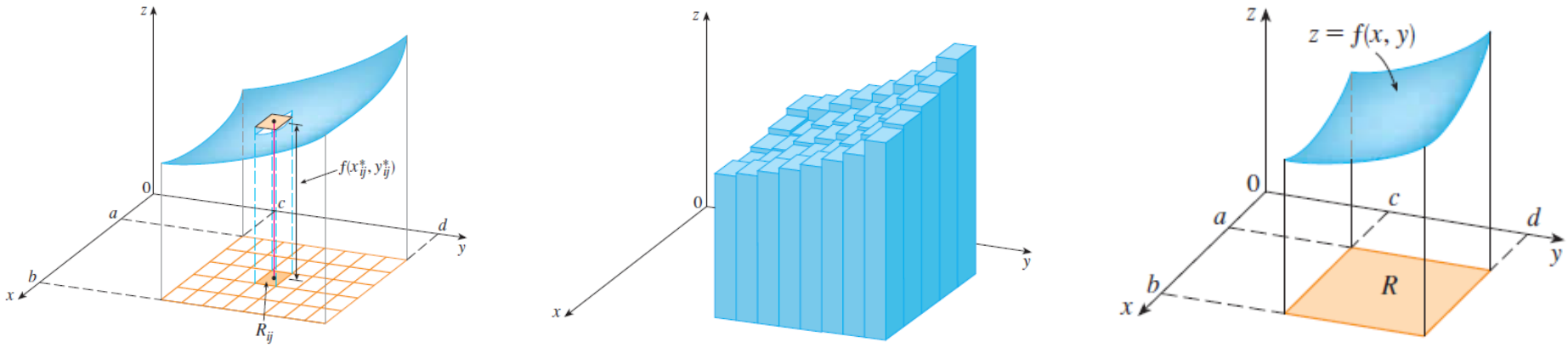


  - $i = 1, 2, ..., m$ con $x_0 = a$, $x_m = b$; $j = 1, 2, ..., n$ con $y_0 = c$, $y_n = d$
- En cada R_{ij} se elige un **punto muestra** $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$ y se aproxima el volumen de la parte de S que queda sobre R_{ij} con el de la "columna" rectangular de base R_{ij} y altura $f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$: $V_{ij} = f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta x \Delta y$



- Se aproxima el volumen V de S sumando los volúmenes de todas las columnas consideradas en el paso 3:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x \Delta y$$



- Claramente, la aproximación anterior será mejor cuanto mayores sean m y n, por lo que es de esperar que

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x \Delta y$$

En lo que sigue, ΔA denotará el área de cada rectángulo R_{ij}, esto es,

$$\Delta A = \Delta x \Delta y = \frac{b-a}{m}\frac{d-c}{n}$$

Definición (integral doble sobre rectángulos)

Si f es una función de dos variables, la integral doble de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A$$

si el límite existe, en cuyo caso, se dice que f es integrable sobre R.

El significado preciso del límite anterior es que $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \Rightarrow \left| \iint_R f(x,y)\, dA - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de puntos muestra $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$ en R_{ij}.

Hechos a tener en cuenta:

- Si f es continua sobre un rectángulo cerrado R, entonces f es integrable sobre R.
- Si f es acotada en un rectángulo R y es continua sobre R, excepto en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable sobre R.

Considerando la definición anterior y la discusión precedente, el **volumen** de S puede expresarse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geq 0$ es integrable sobre el rectángulo R, el volumen V del sólido que está encima de R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

DOBLE SUMA DE RIEMANN

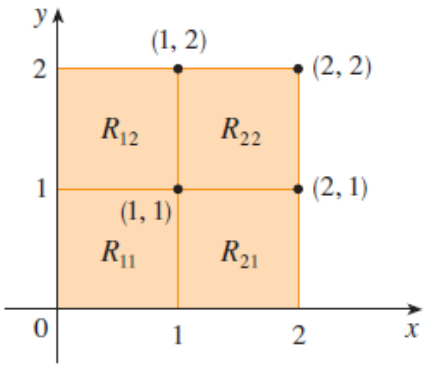
La suma

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta A}$$

se llama **doble suma de Riemann**.

- Se puede emplear como una aproximación de la integral doble correspondiente.
- Cuando f es una función *positiva*, representa la suma de los volúmenes de las columnas que se utilizan para aproximar el volumen bajo la gráfica de f.

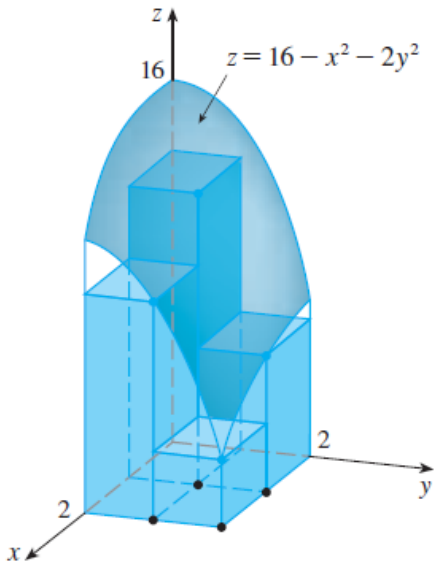
EJEMPLO 1 (p.977) Estimar, mediante una **doble suma de Riemann**, el volumen V del sólido que está arriba del cuadrado



$$R = [0,2] \times [0,2]$$

y debajo del paraboliode elíptico

$$z = 16 - x^2 - 2y^2$$

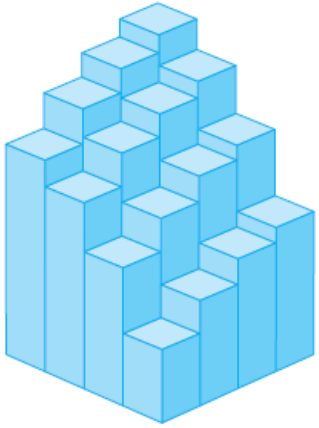


Para ello, dividir R en cuatro cuadrados iguales R_{ij} $(i, j = 1, 2)$ y elegir como punto muestra el de la esquina superior derecha de cada uno.

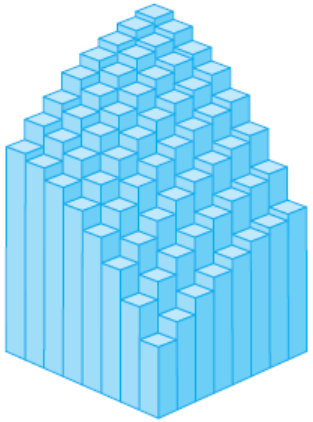
Solución:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta A \\ &= f\left(x_{11}^*, y_{11}^*\right)\Delta A + f\left(x_{12}^*, y_{12}^*\right)\Delta A + f\left(x_{21}^*, y_{21}^*\right)\Delta A + f\left(x_{22}^*, y_{22}^*\right)\Delta A \\ &= f(1,1)\,\Delta A + f(1,2)\,\Delta A + f(2,1)\,\Delta A + f(2,2)\,\Delta A \\ &= 13\,(1) + 7\,(1) + 10\,(1) + 4\,(1) = 34 \end{aligned}$$

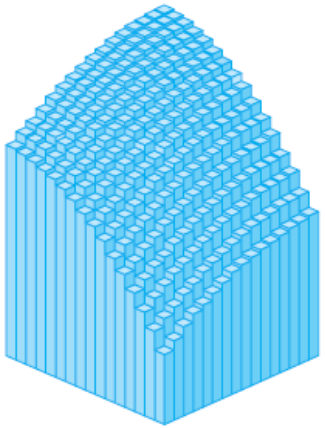
Observación: Se obtienen mejores aproximaciones para el volumen de este ejemplo si se incrementa la cantidad de rectángulos en los que se divide R.



$m=n=4$, **V≈41.5**



$m=n=8$, **V≈44.875**



$m=n=16$, **V≈46.46875**

EJEMPLO 2 (p.978) Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, hallar el valor de la integral $\iint\limits_R \sqrt{1-x^2}\,dA$

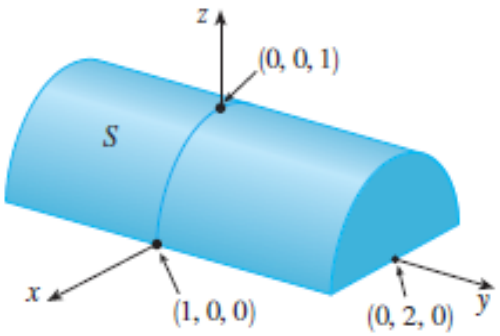


FIGURA 9

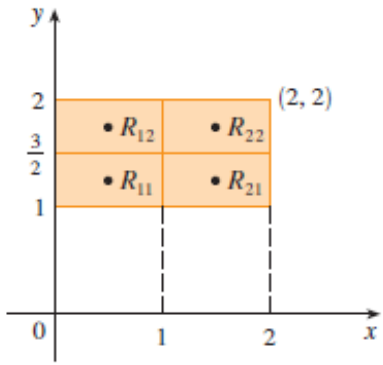
SOLUCIÓN Sería difícil evaluar esta integral de manera directa a partir de la definición 5 pero, debido a que $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, se puede calcular la integral interpretándola como un volumen. Si $z = \sqrt{1-x^2}$, entonces $x^2 + z^2 = 1$ y $z \geqslant 0$, así que la integral doble dada representa el volumen del sólido S que yace debajo del cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ y arriba del rectángulo R. (Véase la figura 9.) El volumen de S es el área de un semicírculo con radio 1 multiplicada por la longitud del cilindro. Por consiguiente,

$$\iint\limits_R \sqrt{1-x^2}\,dA = \tfrac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.



V EJEMPLO 3 Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de la integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUCIÓN Al usar la regla del punto medio con $m = n = 2$, se evalúa $f(x, y) = x - 3y^2$ en los centros de los cuatro subrectángulos mostrados en la figura 10. Por tanto, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ y $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \frac{1}{2}$. Así que

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\
&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\
&= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\
&= -\tfrac{95}{8} = -11.875
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11.875$$

Nota: Se debe tener presente que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida sólo cuando el integrando es una función no negativa sobre toda la región de integración.

En otro caso, podría considerarse un "volumen con signo".

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Definición (**valor promedio**)

Si f es una función de dos variables definida sobre un rectángulo R, el **valor promedio** *de f en R es*

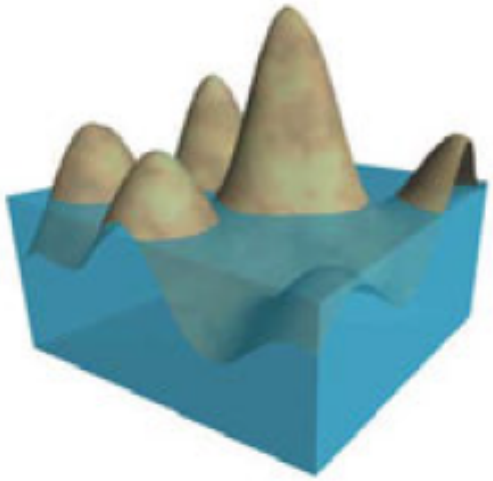
$$f_{prom} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R)$ denota el área de R.

Observación: Si $f(x, y) \geq 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{prom} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

indica que el *cubo* con base R y altura f_{prom} tiene el mismo volumen que el sólido que yace sobre R debajo de la gráfica de f.



INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

PROPIEDADES

Supongamos que f y g son funciones de dos variables integrables sobre un rectángulo R. Entonces:

- $\iint\limits_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint\limits_R f(x,y)\, dA + \iint\limits_R g(x,y)\, dA$
- $\iint\limits_R cf(x,y)\, dA = c \iint\limits_R f(x,y)\, dA$ para cualquier constante c
- Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo (x,y) en R,

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA \geq \iint\limits_R f(x,y)\, dA$$

Nota: Las demostraciones de estas propiedades se desprenden de las propiedades análogas de los límites y sumas dobles que definen las integrales involucradas. Ejercicio!

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

INTEGRALES ITERADAS

- En el cálculo de una variable, típicamente, es difícil evaluar *integrales simples* usando directamente la definición de integral.
- El **teorema fundamental del cálculo** provee un método mucho más fácil mediante el uso de antiderivadas.
- Evaluar *integrales dobles* a partir de su definición es aún más difícil...
- Veremos cómo una integral doble se puede evaluar calculando dos integrales simples: **integrales iteradas**.

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

INTEGRALES ITERADAS

Sea f una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

Se usan las las notaciones:

- $\int_a^b f(x, y)\, dx$ para indicar que y se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a la variable x desde $x = a$ hasta $x = b$.
- $\int_c^d f(x, y)\, dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a la variable y desde $y = c$ hasta $y = d$.

A estos procedimientos se los llama **integración parcial** con respecto a x y con respecto a y, respectivamente.

Observación: $\int_c^d f(x, y)\, dy$ es un número que depende del valor de x.

Si se define la función de una variable

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

y se considera su integral simple desde $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene que

$$\int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

La integral del lado derecho de la ecuación anterior se llama **integral iterada**. Típicamente se omiten los corchetes, de modo que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$$

indica que primero se integra respecto a y (desde c hasta d), y luego respecto a x (desde a hasta b).
Análogamente,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

indica que primero se integra respecto a x (desde a hasta b), y luego respecto a y (desde c hasta d).

EJEMPLO 1 Evalúe las integrales iteradas.

a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

SOLUCIÓN

a) Si se considera x como una constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \tfrac{3}{2} x^2$$

Así, la función A en la explicación anterior está dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ en este ejemplo. Ahora integramos esta función de x de 0 a 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

b) Aquí se integra primero respecto a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{27}{2}$$

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS

Teorema (de Fubini)

Si f es una función de dos variables continua sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$$

o bien, es acotada sobre R y discontinua sólo en una cantidad finita de curvas suaves, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy$$

siempre que las integrales iteradas existan.

Nota: La demostración formal del Teorema de Fubini excede el nivel de este curso. No obstante, resulta algo más sencillo dar una explicación intuitiva de por qué se cumple al menos para el caso en que f es no negativa sobre R. Queda para el alumno leer dicha explicación (p.984).

Retomando el EJEMPLO 1 (p.983), se tiene que la función de dos variables

$$f(x,y) = x^2 y$$

es continua (pues es un monomio) sobre el rectángulo de interés

$$R = [0,3] \times [1,2] = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

Entonces, en virtud del Teorema de Fubini, resulta que

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{[0,3]\times[1,2]} x^2 y dA = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy = \frac{27}{2}$$

Recomendación: Antes de abordar la práctica correspondiente, leer los EJEMPLOS 2, 3 y 4 (p.985-986).