UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Consideremos una función de dos variables $z = f(x, y)$ con dominio D.

Recordemos... Hemos definido antes las **derivadas parciales** de f como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

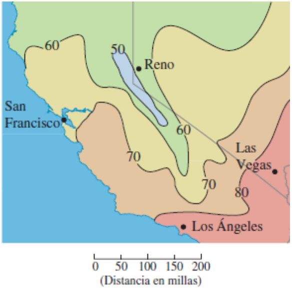
en cada punto (x_0, y_0) en D donde estos límites existen.

Además... Hemos interpretado estas derivadas como las *razones de cambio* o *tasas de variación* (*instantáneas*) de z (o de f) en el punto (x_0, y_0) en las direcciones de los ejes x e y respectivamente, es decir, en las direcciones de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

EJEMPLO [p. 933]**:** Supongamos que la función $T(x, y)$ representa la temperatura (en *grados Fahrenheit*) a las 3:00 PM de cierto día de octubre, para las diferentes localidades de los Estados de California y Nevada.

Consideremos el mapa climático correspondiente en la sig. figura:



Cada curva de nivel de $T(x, y)$ (*isoterma*) une localidades con la misma temperatura.

Nota: Las coordenadas x e y que representan a cada localidad dependerán de dónde se ubique el origen en nuetro mapa (y se miden en *millas*).

Si denotamos por (x_0, y_0) al punto que representa (por ejemplo) a Reno, entonces:

- $T_x(x_0, y_0)$ nos indica la *razón de cambio* de la temperatura con respecto a la distancia si emprendemos un viaje hacia el este de Reno.
- $T_y(x_0, y_0)$ nos indica la *razón de cambio* de la temperatura con respecto a la distancia si emprendemos un viaje hacia el norte de Reno.

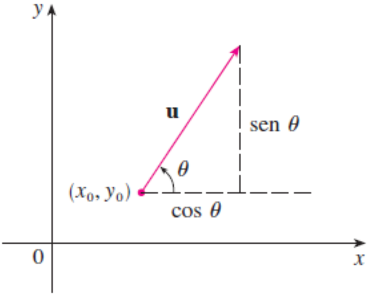
Pero... ¿Qué sucede si quisiéramos conocer dicha razón de cambio para emprender un viaje hacia Las Vegas, es decir, hacia el sureste de Reno ?

A continuación estudiaremos una clase de derivadas (que incluye a las parciales) que permite calcular las razones de cambio de una función f en cualquier dirección: **las derivadas direccionales**.

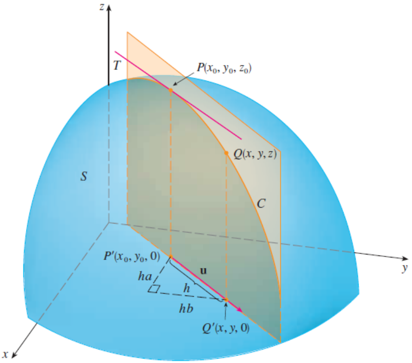
Sea $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ un vector unitario arbitrario (con cualquier dirección).

Procederemos a definir las *razones de cambio* (*media* e *instantánea*) de $z = f(x, y)$ con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\mathbf{u}$.

- Supongamos que $\mathbf{u}$ se representa en el plano con punto inicial $(x_0, y_0) \in dom(f)$.
- Su punto final tiene, entonces, coordenadas $(x_0 + a, y_0 + b)$.
- Además, sabemos que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$.



Sea S la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$ y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$.



Observaciones:

- El punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en S.
- El plano vertical paralelo a **u** que pasa por P corta a S en una curva C.

Sea T la recta tangente a C en el punto P.
Sea $Q(x, y, z)$ cualquier otro punto sobre C.

Si $P'(x_0, y_0, 0)$ y $Q'(x, y, 0)$ son las proyecciones de P y Q en el plano xy, el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ resulta paralelo a **u**, es decir, $\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u}$ para algún $h \in \mathbb{R}$.

Entonces:

$$\langle x - x_0, y - y_0 \rangle = \langle ha, hb \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ha \\ y - y_0 = hb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ha \\ y = y_0 + hb \end{cases}$$

y $\left\| \overrightarrow{P'Q'} \right\| = |h| \, \|\mathbf{u}\| = |h| \cdot 1 = |h|$ (h es la distancia con signo de P a Q).

Luego, si la posición de un punto (en el dominio de f) varía de (x_0, y_0) a (x, y), entonces:

- El **cambio neto** (o **incremento**) correspondiente de la variable dependiente z (o de los valores de la función f) es

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)$$

- La **razón de cambio media** (o **promedio**) de z (o de f) con respecto a la distancia es

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

  Nota: Este cociente también puede interpretarse como la pendiente de la recta secante entre los puntos P y Q de la curva C.

Por lo tanto, si se toma el límite del cociente anterior cuando la distancia h tiende a 0 se obtiene...

1. ... la **razón de cambio instantánea** de z (o de f) en (x_0, y_0) con respecto a la distancia, en la dirección de $\mathbf{u}$.
2. ... la **pendiente** de la recta T.

Esto motiva la siguiente definición...

Definición (**derivada direccional**)

Sean $f(x, y)$ una función real de dos variables y (x_0, y_0) un punto en el dominio de f. Si $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es cualquier vector unitario, la **derivada direccional** *de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

Nota: Si $\mathbf{v}$ es cualquier otro vector con la misma dirección que el vector unitario $\mathbf{u}$, también podemos decir que $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ es la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{v}$.

No obstante... la aplicación de la definición correspondiente requiere de un vector unitario.

Observación: Aplicando la definición anterior con el vector unitario $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ (en la dirección positiva del eje x) tenemos que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{i}} f(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot 1, y_0 + h \cdot 0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ &= f_x(x_0, y_0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene recordando la definición de derivada parcial de f con respecto a x.

Procediendo análogamente, con el vector unitario $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ resulta que

$$D_{\mathbf{j}} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).$$

Por lo tanto:

Las derivadas parciales de f son casos particulares de sus derivadas direccionales.

Para obtener derivadas direccionales de una función que está representada mediante una fórmula explícita se puede...

- ...utilizar la definición anterior (*calcular el límite correspondiente*),

(o bien)

- ...utilizar el siguiente teorema (*cuando sus hipótesis lo permitan*).

Teorema (cálculo de derivadas direccionales)

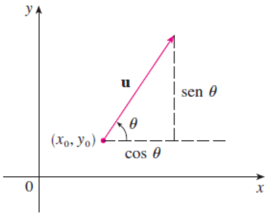
Si f es una función de las variables x e y que es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces para cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ se satisface que

$$D_{\mathbf{u}} f\,(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

Observación:

Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el semieje x positivo, entonces se puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\,\theta, \text{sen}\,\theta\rangle$ (*coordenadas polares*) y así, la fórmula del teorema anterior se transforma en

$$\boxed{D_{\mathbf{u}} f\,(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\,\theta + f_y(x_0, y_0)\text{sen}\,\theta}$$



DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\, a + f_y(x_0, y_0)\, b \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO: Consideremos la función polinómica de dos variables

$$f(x, y) = x^3 y^2$$

Calcularemos la derivada direccional de f **en el punto** $(-1, 2)$ **en la dirección del vector** $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$. En efecto, lo primero será obtener el vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección (y sentido) que $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \langle 4, -3 \rangle = \frac{1}{5} \langle 4, -3 \rangle = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$$

Luego, a fin de aplicar la fórmula provista por el teorema anterior, consideramos las derivadas parciales de f:

$$f_x(x, y) = 3x^2 y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2x^3 y$$

Finalmente, la derivada direccional que buscamos resulta:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(-1, 2) &= f_x(-1, 2) \cdot \frac{4}{5} + f_y(-1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 12 \cdot \frac{4}{5} + (-4) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = \boxed{12} \end{aligned}$$

Ahora, interpretaremos el valor hallado anteriormente suponiendo que $f(x.y) = x^3y^2$ **da la temperatura** (en $^\circ C$) **en cada punto** (x, y)**.**
En tal caso:

$$D_{\mathbf{u}}f(-1, 2) = 12$$

indica que si un punto "se mueve" desde $(-1, 2)$ en la dirección determinada por **u** (o por **v**) su temperatura *aumentará* a razón de $12^\circ C$ por unidad de distancia.

Ejercicio: Interpretar, bajo la misma suposición, los valores de $f_x(-1, 2)$ y $f_y(-1, 2)$ ■

Recomendaciones:

▶ Leer el EJEMPLO 1 de la p. 934: Muestra cómo se puede estimar el valor de la derivada direccional cuando no se cuenta con una fórmula explícita para la función de interés.

▶ Leer el EJEMPLO 2 de la p. 935: Ilustra la aplicación de la fórmula del teorema anterior con coordenadas polares.

Nota: Como hemos visto, el teorema anterior proporciona una fórmula que permite calcular, en cualquier punto en el que una función es diferenciable, todas sus derivadas direccionales, quedando establecida (indirectamente) la **existencia** de las mismas.

El recíproco de esta implicación no es válido. Es decir, aún cuando existan las derivadas en todas las direcciones, no se puede garantizar la diferenciabilidad.

Por ejemplo: La función f dada a continuación admite derivada direccional en $(0,0)$ para toda dirección y, sin embargo, no es diferenciable en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observación: La fórmula establecida en el teorema anterior se puede expresar también como el producto escalar de dos vectores:

$$D_{\mathbf{u}}f\,(x_0, y_0) = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\rangle \cdot \langle a, b\rangle$$

El primer vector en el producto anterior es muy importante, dado que surge en numerosos contextos y aplicaciones, por lo que recibe un nombre y una notación especiales.

Definición (**vector gradiente**)

Sea f una función de las variables x e y. El **gradiente** *de f, denotado por ∇f (se lee "nabla f"), es la función vectorial de dos variables dada por*

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle$$

EJEMPLO: Nuevamente, consideremos la función $f\,(x, y) = x^3y^2$ y el vector unitario $\mathbf{u} = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle$ (del ejemplo anterior). Entonces:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y)\rangle = \left\langle 3x^2y^2, 2x^3y\right\rangle$$

$$\nabla f\,(-1, 2) = \langle f_x\,(-1, 2)\,, f_y\,(-1, 2)\rangle = \langle 12, -4\rangle$$

$$D_{\mathbf{u}}f\,(-1, 2) = \nabla f(-1, 2) \cdot \mathbf{u} = 12 \cdot \tfrac{4}{5} + (-4) \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{48}{5} + \tfrac{12}{5} = 12$$

La teoría desarrollada en esta clase se puede generalizar en forma completamente análoga para funciones de tres o más variables.

Queda para el alumno... Leer/estudiar la generalización de las definiciones principales para el caso de tres variables (pág.937-938).

Dada una función f de dos (o tres) variables, un vector unitario $\mathbf{u}$ y y un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{dom}(f)$, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f\,(\mathbf{x}_0)$, si existe, da (como vimos antes) la razón a la que cambia f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección determinada por $\mathbf{u}$. Dicha derivada puede ser:

- **positiva** (f aumenta en la dirección de $\mathbf{u}$, en un entorno de $\mathbf{x}_0$),
- **negativa** (f disminuye en la dirección de $\mathbf{u}$,en un entorno de $\mathbf{x}_0$),
- **cero** (no existe, en esa dirección, un entorno de $\mathbf{x}_0$ en el que f sea creciente o decreciente).

Consideremos ahora todos los vectores unitarios en cuya dirección existe la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$. Cabe plantearnos las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de estas direcciones f cambia más rápido (en $\mathbf{x}_0$)?
2. ¿Cuál es la máxima razón de cambio (en $\mathbf{x}_0$)?

Ambas respuestas se encuentran en el siguiente teorema...

Teorema (del gradiente)

Sea f una función de dos (o tres) variables diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0$.

(i) *La* **mayor razón** *(o* **tasa***)* **de crecimiento de** f **en** $\mathbf{x}_0$*, es decir, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$, se alcanza cuando $\mathbf{u}$ es el vector unitario con la misma dirección que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y es igual a $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.*

(ii) *La* **mayor razón** *(o* **tasa***)* **de decrecimiento de** f **en** $\mathbf{x}_0$*, es decir, el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$, se alcanza cuando $\mathbf{u}$ es el vector unitario con la misma dirección que $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y es igual a $-\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$.*

Demostración: Se sigue inmediatamente del hecho de que

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\,\|\mathbf{u}\|\cos\theta = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{u}$. **Ejercicio:** completar los detalles [*Ayuda*: ver en p.939] ■

EJEMPLO 6

a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

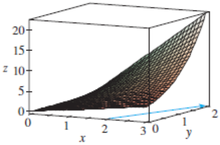
b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

a) Primero calculamos el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

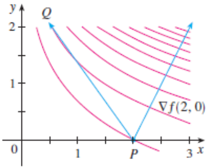
$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$



El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2 \rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1(-\tfrac{3}{5}) + 2(\tfrac{4}{5}) = 1$$



b) De acuerdo con el teorema 15, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$

Sugerencia: Leer también el EJEMPLO 7 en p.939-940.