UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de Varias Variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Recordemos de CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I:

La "regla de la cadena" para funciones de una variable nos indica cómo derivar funciones compuestas.

Si $y = f(x)$ y, a su vez, $x = g(t)$, donde x es derivable en el punto t_0 e y es derivable en $x_0 = g(t_0)$, entonces y (como función de t) es derivable en t_0 y

$$f'(t_0) = f'(x_0)\, g'(t_0)$$

Utilizando otra notación válida, la fórmula anterior puede expresarse también como

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0} \frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}$$

o, simplemente,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

siempre y cuando no se pierdan de vista el rol de cada variable y el hecho de que la fórmula es aplicable sólo a los puntos que satisfacen las hipótesis de diferenciabilidad requeridas (como t_0).

Esta "regla" para derivar composiciones se generaliza fácilmente para funciones de dos o más variables, para las cuales admite varias versiones, como veremos a continuación...

Caso 1: Función de *dos* variables compuesta con funciones de *una* variable...

- $z = f(x, y)$ donde $x = g(t)$ e $y = h(t)$
- z es "indirectamente" una función de t: $z = f(g(t), h(t))$
- Se desea obtener dz/dt

Caso 2: Función de *dos* variables compuesta con funciones de *dos* variables...

- $z = f(x, y)$ donde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$
- z es "indirectamente" una función de s y t: $z = f(g(s, t), h(s, t))$
- Se desean obtener $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$

Caso general: Función de n variables compuesta con funciones de m variables... *Se desean obtener todas las derivadas posibles...*

Teorema (Regla de la cadena ▶ Caso 1)

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables, cada una de las cuales es, a su vez, una función de la variable t, es decir, $x = g(t)$ e $y = h(t)$. Supongamos, además, que las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son derivables en cierto punto t_0 y que z es diferenciable en el punto (x_0, y_0), donde $x_0 = g(t_0)$ e $y_0 = h(t_0)$. Entonces, z es derivable en t_0 y satisface la fórmula

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

En el teorema previo:

- t es la variable independiente
- x e y son las "variables intermedias"
- z es la variable dependiente

Observaciones:

- La fórmula dada contiene un término por cada variable intermedia.
- Otras alternativas para expresarla son

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \text{o} \qquad z'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}g'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}h'(t)$$

- Cuando resulta necesario especificar los puntos sobre los que se aplica dicha fórmula, se puede escribir, por ejemplo:

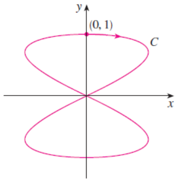
$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t_0}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\frac{dy}{dt}\Big|_{t_0}$$

  o también,

$$\frac{df}{dt}\Big|_{t_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,g'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h'(t_0)$$

Ejemplo 1 [p.925]**:** Si $z=x^2y+3xy^4$ donde $x=\text{sen}2t$ e $y=\cos t$, hallar el valor de dz/dt cuando $t=0$. *En pizarrón...*

La derivada de este ejemplo se puede interpretar como la *razón de cambio* de $z=f(x,y)$ con respecto a t cuando el punto (x,y) se desplaza por la curva C de ecuaciones paramétricas: $x=\text{sen}2t$, $y=\cos t$, $t\in\mathbb{R}$.



Teorema (**Regla de la cadena ▶** Caso 2)

Sea $z = f(x, y)$ una función real de dos variables, cada una de las cuales es, a su vez, una función real de las variables s y t, es decir, $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$. Supongamos, además, que las funciones x e y son diferenciables en cierto punto (s_0, t_0) y que z es diferenciable en el punto (x_0, y_0), donde $x_0 = g(s_0, t_0)$ e $y_0 = h(s_0, t_0)$. Entonces, z es diferenciable en (s_0, t_0) y satisface las fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

En este caso:

- s y t son las variables independientes
- x e y son las "variables intermedias"
- z es la variable dependiente

Observación: Ambas fórmulas contienen un término por cada variable intermedia.

Ejemplo 3 [p.926]**:** Si $z = e^x \operatorname{sen} y$ donde $x = st^2$ e $y = s^2 t$, obtener una fórmula para cada una de las funciones $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. *En pizarrón...*

Teorema (versión general de la regla de la cadena)

Sea u una función real de las n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, cada una de las cuales es, a su vez, una función de las m variables $t_1, t_2, ..., t_m$. Supongamos, además, que para cada $i = 1, 2, ..., n$, x_i es diferenciable en cierto punto $(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$ y u es diferenciable en $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, donde $x_1^* = x_1(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$, $x_2^* = x_2(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$, ..., $x_n^* = x_n(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$. Entonces u es diferenciable en $(t_1^*, t_2^*, ..., t_m^*)$ y satisface las fórmulas

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

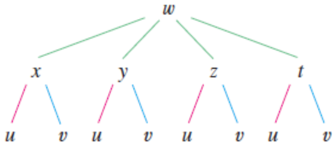
para cada $j = 1, 2, ..., m$.

Observación: En general, la regla de la cadena proporciona una fórmula por cada variable independiente $t_1, t_2, ..., t_m$, y cada una de estas fórmulas contiene un término por cada variable intermedia $x_1, x_2, ..., x_n$.

Para aplicar correctamente la regla de la cadena suele resultar útil dibujar un **diagrama de árbol:**

1. Se dibuja una rama desde la variable dependiente a cada variable intermedia.
2. Cada variable intermedia se ramifica en las variables independientes.
3. En cada rama se escribe la derivada correspondiente.
4. Para obtener la derivada de la variable dependiente respecto a una variable independiente se calcula el producto entre las derivadas en cada trayectoria que las une y luego se suman estos productos.

Ejemplo 4 [p.927] Obtener las fórmulas de la regla de la cadena para el caso en que $w = f(x, y, z, t)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ y $t = t(u, v)$.



Ejercicio: Leer detenidamente el Ejemplo 5 de la p.927.

La regla de la cadena se puede aplicar para obtener fórmulas de derivación implícita...

Supongamos, por ejemplo, que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y de manera implícita como una función (derivable) de x. Esto es:

$$\boxed{y = f(x) \quad \text{donde} \quad F(x, f(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \in dom(f)}$$

Entonces, para determinar la derivada dy/dx se puede considerar a F como una función de dos variables compuesta con las funciones de una variable

$$x = g(x) \qquad \text{e} \qquad y = f(x)$$

Así, en virtud del "caso 1" de la regla de la cadena:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Por otro lado, derivando la ecuación original miembro a miembro:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\,(0)}{dx} = 0$$

Luego, combinando y teniendo en cuenta que $dx/dx = 1$, resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

o, equivalentemente (siempre y cuando $\partial F/\partial y \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Ejemplo 8 [p.929]**:** Determinar $y'(x)$ si $x^3 + y^3 = 6xy$. *En pizarrón...*

Ahora, supongamos que una función $z = f(x, y)$ está dada implícitamente mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Entonces, aplicando la regla de la cadena y procediendo de modo similar, se obtienen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Queda para el alumno: Leer detenidamente el desarrollo correspondiente (p.929) y el Ejemplo 9 de la p.930.