UNIDAD 2

DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de Varias Variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Recordemos de CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I:

Dada una función f de una variable, cuya gráfica es cierta curva C

- A medida que se consideran puntos sobre el eje x cada vez más cercanos a un punto fijo a en el que f es **derivable**, la parte correspondiente de C se parece más a una recta: la recta tangente a C en el punto $(a, f(a))$.
- En consecuencia, resulta posible aproximar (localmente) los valores de f mediante los de una función lineal de una variable: la que representa a dicha recta.

A continuación, desarrollaremos ideas similares a estas pero en el espacio tridimensional. Concretamente:

Dada una función f de dos variables, cuya gráfica es cierta superficie S:

- A medida que se consideran puntos sobre el plano xy cada vez más cercanos a un punto fijo (a, b) en el que f es **diferenciable**, la parte correspondiente de S se parece más a un plano: el plano tangente a S en el punto $(a, b, f(a, b))$.
- Luego, es posible aproximar (localmente) los valores de f mediante los de una función lineal de dos variables: la que representa a dicho plano.

Tales ideas son, incluso, aplicables a superficies en general...

Definición (recta tangente a una superficie)

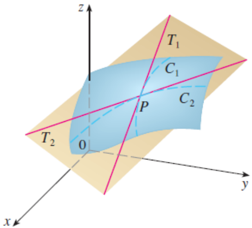
Una recta l es tangente a una superficie S en el punto P de S si es tangente en P a alguna curva C, contenida en S, que pase por P.

Definición (plano tangente a una superficie)

Cuando ocurre que todas las rectas tangentes a una superficie S en el punto P de S conforman un plano, este se llama plano tangente a S en P.

En particular, cuando la superficie S tiene ecuación $z = f(x, y)$:

- Si las derivadas parciales f_x y f_y existen en cierto punto (a, b) de $dom(f)$, las rectas T_1 y T_2 con pendientes $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ respectivamente, son rectas tangentes a S en el punto (a, b, c), donde $c = f(a, b)$.
- Si las f_x y f_y existen en (a, b) y, además, existe el plano tangente a S en (a, b, c), las rectas T_1 y T_2 antes referidas están contenidas en dicho plano.



Definición (vector gradiente de una función de 2 variables)

Sea f una función real de las variables "x" e "y", cuyas derivadas parciales existen en cierto punto (a, b) de su dominio. El vector bidimensional $\langle f_x(a, b), f_y(a, b)\rangle$ se llama **gradiente** *de f en (a, b) y se denota por $\nabla f(a, b)$.*

Definición (vector gradiente de una función de 3 variables)

Sea f una función real de las variables "x", "y" y "z", cuyas derivadas parciales existen en cierto punto (a, b, c) de su dominio. El vector tridimensional $\langle f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c)\rangle$ se llama **gradiente** *de f en (a, b, c) y es usual denotarlo como $\nabla f(a, b, c)$.*

Nota: La definición de vector gradiente se puede extender por analogía a funciones con cualquier cantidad finita de variables.

EJEMPLO: En pizarrón...

Teorema (16.31, Swokowski)

Sea S una superficie con ecuación $F(x, y, z) = 0$ y sea $P(a, b, c)$ un punto de S. Si F tiene primeras derivadas parciales continuas, y estas no son todas nulas en P, entonces el vector $\nabla F(a, b, c)$ es normal al plano tangente a S en P.

Nota: La demostración de este teorema no se estudiará/evaluará en este curso. No obstante, el alumno interesado en ella puede encontrarla al final de esta presentación.

Corolario (16.32, Swokowski)

Bajo las mismas hipótesis (y notaciones) que en el teorema anterior, una ecuación (normal) para el plano tangente S en P es

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

Leer EJEMPLO 1, p.839, *Swokowski*.

El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S en las cercanías del punto P.

Observación: Para el caso particular en que la superficie S es la gráfica de una función $f(x, y)$, su ecuación es

$$z = f(x, y) \qquad \text{o} \qquad z - f(x, y) = 0$$

Entonces, definiendo $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ se puede reescribir esta ecuación como $F(x, y, z) = 0$, y se verifica:

$$F_x(x, y, z) = -f_x(x, y) \qquad F_y(x, y, z) = -f_y(x, y) \qquad F_z(x, y, z) = 1$$

Por lo tanto: si $c = f(a, b)$, la *ecuación del plano tangente* a S en el punto (a, b, c) resulta:

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + (z - c) = 0$$

o, equivalentemente,

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

la cual también se podría escribir como

$$\boxed{z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)}$$

V **EJEMPLO 1** Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

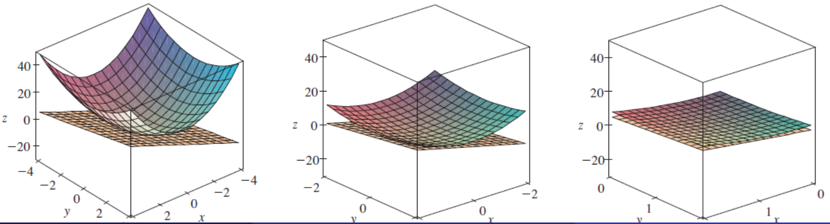
$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Entonces $\boxed{2}$ da la ecuación del plano tangente en $(1, 1, 3)$ como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o bien,

$$z = 4x + 2y - 3$$



Hemos visto que una ecuación para el plano tangente a una superficie que es la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Definición (aproximación lineal)

La función lineal

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **linealización** *de f en (a, b), y la aproximación*

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

se llama **aproximación lineal** *o* **aproximación por el plano tangente** *de f en (a, b).*

En el **ejemplo 1** (*p.916*) se encontró que una ecuación para el plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$ es $z = 4x + 2y - 3$. Entonces:

- $L(x, y) = 4x + 2y - 3$ es la *linealización* de f en $(1, 1)$.
- $f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$ es la *aproximación lineal* de f en $(1, 1)$.
    - $L(1.1, 0.95) = 3.3$ mientras que $f(1.1, 0.95) = 3.3225$, de modo que $f(1.1, 0.95) \approx L(1.1, 0.95)$.
    - $L(2, 3) = 11$ mientras que $f(2, 3) = 17$, de modo que L no es una buena aproximación de f en el punto $(2, 3)$.

Notemos que las funciones de los ejemplos considerados hasta aquí tienen *primeras derivadas parciales continuas*.

- Cuando esta condición falla, una función de dos variables se puede comportar "erráticamente" aún en los puntos en que ambas derivadas existen. Leer del libro el ejemplo comentado al final de la pag.917.
- Para evitar dicho comportamiento, se plantea la idea de función diferenciable de dos variables.

DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

- Consideremos una función de dos variables, $z = f(x, y)$.
- Supongamos que:
  - x cambia de a a $a + \Delta x$
  - y cambia de b a $b + \Delta y$
- El **incremento** correspondiente de z es

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

e.d., Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Definición (diferenciabilidad)

Si $z = f(x, y)$, se dice que f es **diferenciable** *en el punto (a, b) si Δz se puede expresar en la forma*

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$.

DIFERENCIACIÓN EN DOS O MÁS VARIABLES

APROXIMACIONES LINEALES

La definición anterior establece que una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en (a, b) si y sólo si

- su linealización L es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b)
- (*en otras palabras*) el plano tangente en (a, b) se aproxima a su gráfica en las cercanías de (a, b).

En efecto:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

o, equivalentemente,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y ε_2 tienden a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$. Por lo tanto, si Δx y Δy son pequeños,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y = L(a + \Delta x, b + \Delta$$

El siguiente teorema proporciona una *condición suficiente* que resulta práctica para comprobar la diferenciabilidad de muchas funciones.

Teorema

Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

Nota: La demostración de este teorema se omite. No obstante, el alumno interesado en ella puede encontrarla en el apéndice F del libro de cabecera del curso (*Stewart*).

Ejemplo 2 (p.918)**:** Demostrar que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determinar su linealización en dicho punto; luego, utilizarla para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

Demostración del Teorema 16.31 (*Swokowski*):

Nota: En el desarrollo de esta demostración se utilizan las notaciones del libro de *Swokowski* a fin de que resulten compatibles con las ilustraciones que la acompañan. Entonces, el punto $P\,(a, b, c)$ del enunciado dado es reemplazado aquí por $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$.

Sean S, F y P_0 como se describen en las hipótesis del Teorema (16.31).

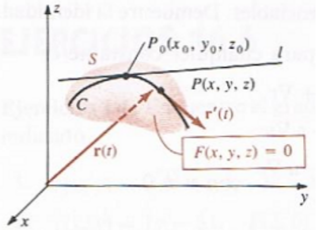
Sea C una curva contenida en S, que pasa por P_0, con ecuaciones paramétricas:

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Si $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$, entonces

$\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$

es un vector tangente a C en $P\,(x, y, z)$.



Para cada valor de t que genera un punto (x, y, z) en C, dicho punto está también en S (pues $C \subseteq S$) y, por lo tanto, satisface su ecuación, es decir,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta esto y aplicando la regla de la cadena, obtenemos que para todo t

$$F_x(x,y,z)x'(t) + F_y(x,y,z)y'(t) + F_z(x,y,z)z'(t) = 0$$

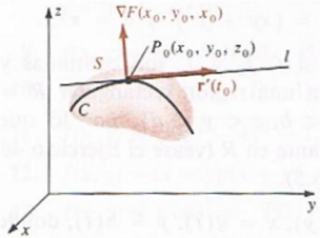
o, equivalentemente,

$$\nabla F\left(x,y,z\right)\cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

En particular, si t_0 es el valor del parámetro correspondiente a P_0, entonces

$\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right)\cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0,$

donde (por hipótesis) $\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right) \neq \mathbf{0}$, de lo que se sigue que $\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right)$ es perpendicular a $\mathbf{r}'(t_0)$ y, por lo tanto, a la recta l tangente a C en P_0.



Como C es una curva arbitraria en S que contiene a P_0, de lo anterior se sigue que $\nabla F\left(x_0,y_0,z_0\right)$ es ortogonal a toda recta tangente a S en P_0, y así, al plano conformado por estas, es decir, al plano tangente a S en P_0 ■