UNIDAD 3

DIFERENCIACIÓN EN VARIAS VARIABLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

RECORDEMOS: En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se definió la *derivada* de una función $f(x)$ de una variable como la función

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Esta fórmula puede obtenerse de los siguientes pasos:

1. Se incrementa la variable independiente x en una cantidad h.
2. Se divide entre h el incremento correspondiente de la variable dependiente, esto es, $f(x+h) - f(x)$.
3. Se hace tender h a 0.

A continuación aplicaremos un procedimiento análogo para definir derivadas de funciones de varias variables.

Si en una función de dos variables $f(x, y)$:

1. Se incrementa una de las variables independientes en una cantidad h.
2. Se divide entre h el incremento correspondiente de la variable dependiente.
3. Se hace tender h a 0.

Entonces, resultan las fórmulas involucradas en la siguiente definición...

Definición (PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES)

Si f es una función real de dos variables:

- *La* **derivada parcial de** f **con respecto a** x *es la función* f_x *dada por*

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

- *La* **derivada parcial de** f **con respecto a** y *es la función* f_y *dada por*

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Observaciones importantes:

- f_x y f_y no están (en principio) definidas para puntos fuera de $dom\,(f)$.
- f_x y/o f_y podrían no estar definidas incluso para algunos puntos de $dom\,(f)$ (cuando el límite correspondiente no existe).

EJEMPLO: Consideremos la función real de dos variables
$f\,(x, y) = \sqrt{x} + y$

En este caso, $dom\,(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\right\}$. Si intentamos obtener su derivada parcial con respecto a la variable "x" según la definición anterior:

$$\begin{aligned} f_x\,(x, y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\,(x+h, y) - f\,(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} + y\right) - \left(\sqrt{x} + y\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \overset{\text{Regla de L´Hôpital}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x+h}} \end{aligned}$$

Analicemos, primero, este límite en el punto $P\,(1, 0) \in dom\,(f)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x+h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+h}} = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{f_x\,(1, 0) = \frac{1}{2}}$$

Ahora, analicemos el mismo límite en el punto $Q\,(0, 1) \in dom\,(f)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x+h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{0+h}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{0+0}}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{f_x\,(0, 1) \text{ no existe!}}$$

Notas sobre el ejemplo anterior:

$\triangleright$ Un análisis similar al del punto P valdría para cualquier punto (x, y) en $dom\,(f)$ para el cual $\sqrt{x+0} = \sqrt{x}$ no se anule, resultando $f_x\,(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\triangleright$ También, un análisis similar al del punto Q valdría para cualquier punto (x, y) en $dom\,(f)$ para el cual $x = 0$, resultando la función $f_x\,(x, y)$ no definida en tales puntos.

Por lo tanto:

$$f_x\,(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{con} \qquad dom\,(f_x) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$$

Por otra parte: Cualquiera sea $(x, y) \in dom\,(f)$

$$\begin{aligned} f_y\,(x, y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x, y+h) - f\,(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x} + y + h\right) - \left(\sqrt{x} + y\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} (1) = 1 \end{aligned}$$

Otras observaciones:

- Si se mantiene a y fija y se considera la función de una variable $g_1(x) = f(x, y)$:
  $f_x(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g_1(x+h)-g_1(x)}{h} = g_1'(x)$
- Si se mantiene a x fija y se considera la función de una variable $g_2(y) = f(x, y)$:
  $f_y(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{g_2(y+h)-g_2(y)}{h} = g_2'(y)$

Por lo tanto:

1. Para determinar f_x, se trata a "y" como una constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a "x".
2. Para determinar f_y, se trata a "x" como una constante y se deriva $f(x, y)$ con respecto a "y".

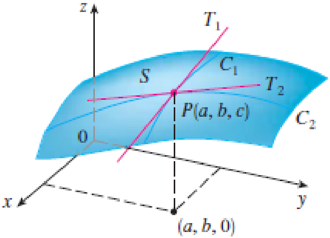
EJEMPLO 1 (p.903).

Otras notaciones para las derivadas parciales: Si $z = f(x, y)$:

- $f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$
- $f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

- Sea f una función de dos variables y sea $(a, b) \in dom\,(f)$.
- Sea S la superficie con ecuación $z = f\,(x, y)$ (la *gráfica* de f).
- Sea $c = f(a, b)$. Observación: el punto $P\,(a, b, c)$ está sobre S.
- Sea C_1 la *traza* de S en el plano vertical $\boxed{y = b}$



Observaciones:

- C_1 pasa por P.
- C_1 es la gráfica de la función de una variable $g\,(x) = f\,(x, b)$.
- La pendiente de la recta T_1 tangente a C_1 en P es $g'\,(a)$, es decir, $f_x\,(a, b)$.

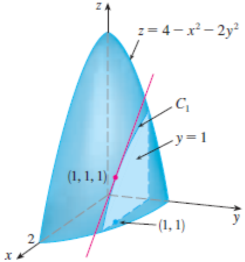
- $f_x\,(a, b)$ es la **pendiente de la recta tangente en** $P\,(a, b, c)$ **a la traza de** S **en el plano** $y = b$.

Procediendo análogamente (con la *traza* C_2 de S en el plano vertical $\boxed{x = a}$ y la función de una variable $g\,(y) = f\,(a, y)$), se llega a que

- $f_y\,(a, b)$ es la **pendiente de la recta tangente en** $P\,(a, b, c)$ **a la traza de** S **en el plano** $x = a$.

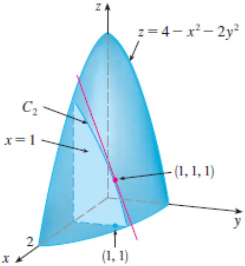
EJERCICIO - EJEMPLO 2 (p.904): Para $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$ determinar $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$ e interpretar estos números como pendientes.

Solución: La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$.



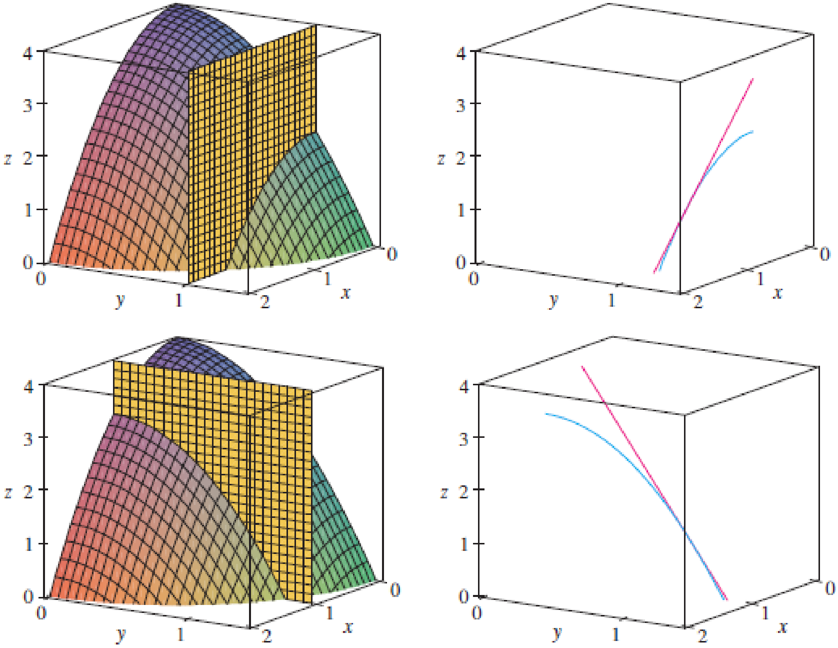
El plano vertical $y = 1$ lo interseca en la parábola
$$\begin{cases} z = 2 - x^2 \\ y = 1 \end{cases}$$
(C_1 *en la notación del análisis anterior*)

$$\boxed{\text{La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto } (1,1,1) \text{ es } f_x(1,1) = -2.}$$



El plano vertical $x = 1$ lo interseca en la parábola
$$\begin{cases} z = 3 - 2y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$
(C_2 *en la notación del análisis anterior*)

$$\boxed{\text{La pendiente de la recta tangente a esta parábola en el punto } (1,1,1) \text{ es } f_y(1,1) = -4.}$$

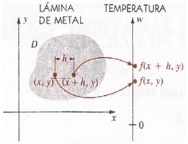

z
y
x
0
1
2
3
4

RAZONES DE CAMBIO

Las derivadas parciales también se pueden interpretar como razones de cambio... Si $z = f(x, y)$:

- $f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$ da la **razón** o **tasa de cambio** (instantánea) **de** z **respecto a** x **cuando** y **permanece constante.**
- $f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$ da la **razón** o **tasa de cambio** (instantánea) **de** z **respecto a** y **cuando** x **permanece constante.**

EJEMPLO: Supongamos que $f(x, y)$ da la temperatura (T°) en cada punto (x, y) de una lámina de metal plana que se encuentra en un plano coordenado xy. Si un punto de la lámina "se mueve" horizontalmente desde (x, y) hasta $(x + h, y)$, entonces:



- $f(x + h, y) - f(x, y)$ es el **cambio neto** de la T°.
- $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ es la **variación media** de la T° (esto es, la razón a la que esta varía, en promedio, por unidad de cambio en la distancia).

Tomando el límite de la variación media cuando h tiende a 0 se ve que

- $f_x(x, y)$ es la **razón** o **tasa de cambio instantánea** de la T° con respecto a la distancia cuando (x, y) "se mueve" en la dirección del eje x.

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

- Si f es una función de las variables x e y, entonces sus derivadas parciales, f_x y f_y, son también funciones de estas dos variables.
- Las derivadas parciales de f_x y f_y se llaman **segundas derivadas parciales** de f o, simplemente, **derivadas segundas** de f.
- Si $z = f(x, y)$, las notaciones más usuales para las derivadas segundas son:
  - $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
  - $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$
  - $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$
  - $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
- f_{xy} y f_{yx} se llaman **segundas derivadas parciales mixtas** (o **cruzadas**) de f o, simplemente, **parciales mixtas** de f.

EJEMPLO 6 (p.906)

Observación: En el ejemplo anterior $f_{xy} = f_{yx}$.

Lo observado en el ejemplo anterior no es coincidencia...

Las derivadas parciales cruzadas son iguales para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica. El siguiente teorema proporciona *condiciones suficientes* para garantizar dicha igualdad.

Teorema (DE CLAIRAUT)

Sea f una función de las variables x e y que está definida sobre un disco abierto D que contiene al punto (a, b). Si f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas sobre D, entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Podríamos decir que la anterior es una formulación "puntual" del Teorema de Clairaut. Sin embargo, si R es una región abierta en el plano xy, dado que todo punto en R es centro de algún disco abierto contenido también en R, dicho teorema puede enunciarse también como sigue:

Teorema (DE CLAIRAUT)

Sea f una función de las variables x e y que está definida sobre una región abierta R. Si f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en R, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en R.

NOTA: La demostración del Teorema de Clairaut NO se estudiará en este curso. No obstante, se puede consultar en el apéndice F del libro *Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas* | 7ª Ed. de *JAMES STEWART*, o en cualquier libro de cálculo avanzado.

También se pueden definir las **derivadas parciales de tercer orden**, **cuarto orden**, etc. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= (f_{xx})_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\ f_{xyy} &= (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \\ f_{xyyx} &= (f_{xyy})_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x} \end{aligned}$$

Mediante el Teorema de Clairaut se puede demostrar las siguientes igualdades (y muchas otras que involucran derivadas cruzadas):

$$\boxed{\begin{array}{c} f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} \\ f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} \end{array}}$$

cuando estas funciones son todas continuas.

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

En las ecuaciones diferenciales que expresan ciertas leyes físicas, la mayoría de las veces, aparecen derivadas parciales...

Por ejemplo:

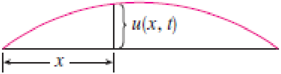
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(donde u representa una función de las variables x e y) se llama **ecuación de Laplace**. Sus soluciones reciben el nombre de *funciones armónicas* y desempeñan un importante papel en los problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

EJERCICIO - EJEMPLO 8 (p.908)**:** Mostrar que $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ es una solución de la ecuación de Laplace (e.d., u satisface dicha ecuación).

Otro ejemplo clásico es la **ecuación de onda**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



(donde u representa una función de las variables x y t, y a es constante).

NOTA: La teoría desarrollada en esta clase se generaliza de manera análoga para **funciones de tres o más variables** (salvo la interpretación geométrica de las derivadas parciales).

Queda para el alumno...

- Leer EJEMPLO 5 (p.906) y comentarios que le preceden (p.905).
- Leer EJEMPLO 7 (p.908).
- Leer comentarios relativos a la ecuación de Laplace en tres dimensiones (p.909).