Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

TEOREMA DE STOKES - TEOREMA DE GAUSS

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

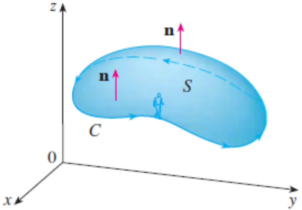
Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

TEOREMA DE STOKES

Podríamos considerar al Teorema de Stokes *como como una versión "tridimensional" del* Teorema de Green...

• El **Teorema de Green** relaciona una integral (doble) **sobre una región plana** con una intregral de línea alrededor de su curva frontera (también plana).

• El **Teorema de Stokes** relaciona una integral **sobre una superficie** (orientada) con una intregral de línea alrededor de su curva frontera (que es una curva en el espacio).



En el Teorema de Stokes, dada la superficie orientada S, se considera **orientación positiva de la curva frontera** C a la inducida por S...

Esto es: *si se camina recorriendo C con la cabeza señalando hacia donde indica* **n**, *la dirección positiva será aquella tal que S quede siempre a mano izquierda.*

Antes de enunciar formalmente el Teorema de Stokes *conviene definir una operación que se puede ejecutar sobre los campos vectoriales sobre* $\mathbb{R}^3$ (*que son los que ahora nos interesan particularmente*).

Definición (rotacional de un campo vectorial)

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ *es un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *tal que las derivadas parciales de* P, Q *y* R *existen sobre una región abierta* D, *el* **rotacional** *de* **F** *es el campo vectorial tridimensional definido sobre* D *como*

$$rot\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para memorizar esta fórmula, es útil tener presente el operador diferencial vectorial ("*nabla*"):

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

el cual cobra sentido cuando opera sobre una función escalar (como hemos visto al definir el vector gradiente asociado a dicha clase de funciones).

Luego, si imaginamos que ∇ es un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ podemos expresar a $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ como un "producto cruz" formal entre ∇ y $\mathbf{F}$... En efecto:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \operatorname{rot}\mathbf{F}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma más sencilla de recordar la definición de rotacional es mediante la expresión simbólica

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$$

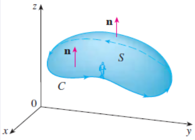
Ejercicio: Mostrar que si f es una función escalar (real) de tres variables con derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$

(*Ayuda*: ver Teorema 3, p.1092.)

Teorema (**de Stokes**)

Sea S una superficie suave por tramos, orientada y acotada por una curva C suave por tramos, simple y cerrada, con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial tridimensional cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en* $\mathbb{R}^3$ *que contiene a S. Entonces,*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S rot\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



Demostración: Se omite en este curso. No obstante, para el caso especial en que S es gráfica de una función real de dos variables, está al alcance del mismo y se puede encontrar en las p.1123-24 del libro de *Stewart*.

Nota: Denotando por ∂S la curva frontera de S, la fórmula del Teorema de Stokes se puede expresar como $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Observaciones:

- $$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \qquad \text{y} \qquad \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

por lo que el T. de Stokes establece que (bajo sus hipótesis) son iguales:

- la *integral de línea* alrededor de ∂S de la *componente tangencial* de $\mathbf{F}$
- la *integral de superficie* sobre S de la *componente normal* de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$

- En el caso especial en que S es una superficie contenida en el plano xy con orientación hacia arriba, el correspondiente vector normal unitario es $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, entonces el Teorema de Stokes se transforma en

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dA = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

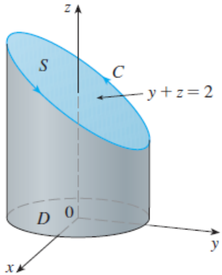
por lo que el T. de Green está, en realidad, abarcado por el T. de Stokes (aplicado a este caso especial).

EJEMPLO 1 [p.1124-1125]**:** Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde

$$F(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

y C es la curva de corte del plano $y + z = 2$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Aunque la integral de línea requerida se puede evaluar en forma directa, resulta más fácil hacerlo aplicando el Teorema de Stokes... Podríamos utilizar muchas superficies diferentes cuya frontera es la curva C, pero la elección más simple es la región elíptica S en el plano $y + z = 2$. Si orientamos a S "hacia arriba", C tendrá la orientación positiva inducida (antihoraria).



Entonces, comenzamos calculando el integrando de la integral de superficie

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Luego, observamos que la proyección D de S sobre el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ y aplicamos la ecuaciones correspondientes:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\, \frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

Propiedad: En general, si S_1 y S_2 son superficies orientadas con la misma curva frontera C, y ambas satisfacen las hiótesis del Teorema de Stokes,

$$\boxed{\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}$$

Sugerencia: Leer el EJEMPLO 2 [p.1125]y su comentario posterior.

TEOREMA DE GAUSS

Antes de abordar el Teorema de Gauss *definiremos otra operación que sobre campos vectoriales,* pero que, adiferencia del rotacional, resulta en una función escalar..

Definición (divergencia de un campo vectorial)

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ *es un campo vectorial sobre* $\mathbb{R}^3$ *tal que las derivadas parciales de* P*,* Q *y* R *existen sobre una región abierta* D*, el* **divergencia** *de* **F** *es la función real de tres variables definida sobre* D *como*

$$div\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Para memorizar esta fórmula, también es útil pensar al operador diferencial vectorial ∇ ("*nabla*") como un vector, lo que permite expresar a div **F** como un "producto escalar" formal entre ∇ y **F**... En efecto::

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{div} \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, podemos recordar la definición de rotacional es mediante la expresión simbólica

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

Ejercicio: Mostrar que si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ tal que sus funciones componentes P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$.
(*Ayuda*: ver Teorema 11, p.1095.)

Con este nuevo operador, se podría expresar la fórmula establecida en el **Teorema de Green** en una "versión vectorial":

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\,(x, y) \; dA$$

donde D es una región en el plano xy y C es su curva frontera.

Luego, se podría conjeturar una versión tridimensional de dicha expresión:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,(x, y, z) \; dV$$

donde E es una región sólida en el espacio y S es su superficie frontera.

El **Teorema de Gauss** (también llamado frecuentemente **Teorema de la divergencia**) establece que, bajo hipótesis adecuadas, la conjetura anterior es válida. Entonces...

El **Teorema de Gauss** relaciona una integral de la "derivada" de una función sobre cierta región con una integral de la función original sobre la frontera de dicha región.

En este sentido guarda una clara similaridad con el Teorema de Stokes, *con el* Teorema de Green *e, incluso, con el* Teorema Fundamental del Cálculo*...*

Teorema (**de Gauss**)

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E con orientación positiva (hacia "afuera"). Sea $\mathbf{F}$ *un campo vectorial tridimensional cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a E. Entonces,*

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iiint_E div\, \mathbf{F}\, dV$$

Demostración: Se omite en este curso. No obstante, está al alcance del mismo y se puede encontrar en las p.1129-30 del libro de *Stewart*.