UNIDAD 1

FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

En CÁLCULO I / ANÁLISIS MATEMÁTICO I se han estudiado las **funciones reales** (esto es, que toman valores en $\mathbb{R}$) que dependen sólo de **una variable independiente** (también en $\mathbb{R}$).

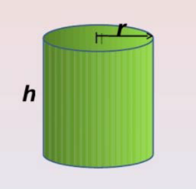
Sin embargo, es fácil observar que, en nuestro mundo, no son pocos los problemas que requieren tener en cuenta dos o más variables independientes. (A continuación, mencionaremos algunos ejemplos...)

En esta clase se introducen las funciones reales con dos o más variables independientes (también reales).

Consideraremos dichas funciones desde cuatro puntos de vista:

- **verbalmente** (mediante una *descripción coloquial*)
- **numéricamente** (mediante una *tabla de valores*)
- **algebraicamente** (mediante una *fórmula explícita*)
- **visualmente** (mediante una *gráfica* o *curvas/superficies de nivel*)

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular el volumen V de un cilindro circular recto.



Dicho volumen depende de dos dimensiones independientes entre sí:

- el *radio* r
- la *altura* h

En efecto, tenemos la conocida fórmula: $V = \pi r^2 h$

Por lo tanto, podemos considerar a V como una función f de las dos variables r y h, o bien, del par (r, h), y escribir:

$$\boxed{V = f(r, h)}$$

Como segundo ejemplo, consideremos la temperatura T de los puntos de nuestro planeta que se encuentran al nivel del mar, en un instante dado (fijo).

El valor de T en cierto punto P depende de su "ubicación", la cual queda determinada al especificar dos números reales independientes entre sí:

- la *longitud* x de P
- la *latitud* y de P

De este modo, podemos pensar a T como una función f de las dos variables x e y, o bien, del par (x, y), y escribir:

$$\boxed{T = f(x, y)}$$

Supongamos ahora que, en el mismo instante fijo, los puntos cuya temperatura deseamos conocer no se encuentran necesariamente al nivel del mar.

Entonces, para obtener el valor de T en cierto punto P resulta necesario especificar un tercer número real independiente de los dos antes mencionados:

- la *altitud* z de P

Con esto en mente, podemos ver a T como una función f de tres variables y escribir:

$$\boxed{T = f\left(x, y, z\right)}$$

Por último, imaginemos que resulta también de interés la temperatura de dichos puntos en diferentes momentos.

En este caso, se incorpora a nuestro problema una nueva variable:

- el *instante* t en que se realiza la medición (de la temperatura)

Luego, podríamos decir que T es una función f de cuatro variables y escribir:

$$\boxed{T = f\,(x, y, z, t)}$$

Definición

Una **función real** f **de dos variables** *(también reales) es una regla que asigna a cada par ordenado* (x, y) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *un único número real que se denota por* $f(x, y)$.

- El conjunto D se llama **dominio** *de* f y suele denotarse por $\text{Dom}(f)$.
- El número $f(x, y)$ se llama "**valor** de f en (x, y)" o "**imagen** de (x, y) bajo f".
- El conjunto de todos los valores que toma f se llama **rango** o **contradominio** de f y suele denotarse por $\text{Rg}(f)$. Simbólicamente: $\text{Rg}(f) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$
- A veces se escribe $z = f(x, y)$ para explicitar el valor que toma f en el punto (x, y). En este caso:
    - z es llamada **variable dependiente**
    - x e y son las **variables independientes**
    - se dice que "z (o f) es una **función de** x **e** y".

Una función de dos variables se puede representar de varias formas...

- Mediante una **fórmula explícita** (o **implícita**)

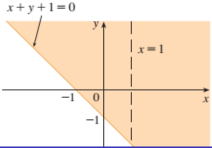
EJEMPLO 1a) [p.878]: $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ $\left(\text{o bien, } z = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}\right)$

En este caso, para obtener el valor de f en un punto dado, simplemente reemplazamos x e y por sus coordenadas en la fórmula dada. Por ejemplo:

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Nota: En esta forma de representación, cuando no se especifica dominio alguno, se entiende que éste consiste de todos los pares (x,y) en $\mathbb{R}^2$ para los cuales la fórmula dada tiene sentido en $\mathbb{R}$. En nuestro ejemplo:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0,\, x \neq 1\right\}$$



Sugerencia: Leer también el ítem b) de este ejemplo.

- Mediante una **tabla de valores**

EJEMPLO 2 [p.879]: La siguiente tabla muestra el **índice de sensación térmica** S como una función de la **temperatura real** T y de la **rapidez del viento** v. De este modo, podemos escribir $S = f(T, v)$.

Rapidez del viento (km/h)

Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

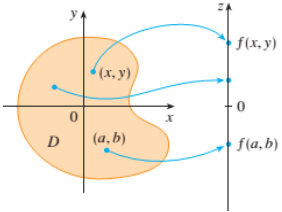
En particular, por ejemplo, cuando la temperatura real es de $-5^\circ C$ $(T = -5)$ y el viento se desplaza a 50 km por hora $(v = 50)$, entonces:

$$S = f(-5, 50) = -15$$

Esto es, subjetivamente se sentirá tanto frío como si la temperatura fuera de $-15^\circ C$ sin viento.

- Mediante un **diagrama de flechas**

En un **diagrama de flechas** el dominio se representa por puntos en el plano xy, y el contradominio, por puntos en la recta real, la cual se suele mostrar como un tercer eje (z) al costado de dicho plano.

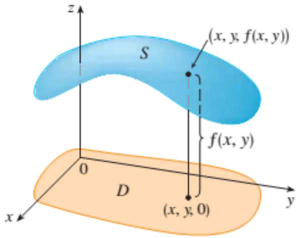


Por ejemplo, si $f(x, y)$ representa la temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica plana con la forma de D [*ver figura*], podemos considerar al eje z como un termómetro que muestra el registro de temperatura de ciertos puntos.

Nota: Esta representación resulta más adecuada cuando el dominio de f es un conjunto finito o cuando sólo interesa visualizar su comportamiento en unos "pocos" puntos.

- Mediante una **gráfica**

Si f es una función real de dos variables con dominio D, la **gráfica** de f es la representación, en un sistema tridimensional de coordenadas, del conjunto de puntos (x, y, z) tales que (x, y) pertenece D y $z = f(x, y)$.



En el caso que nos ocupa (cuando hay dos variables independientes), la gráfica correspondiente es, en general, una superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ [*ver figura*].

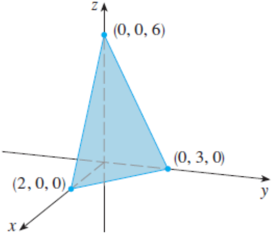
D es una región en el plano xy y se puede visualizar a S por encima y/o debajo de D.

Nota: No toda superficie en el espacio tridimensional es la gráfica de una función real de dos variables.

EJEMPLO 5 [p.881]: Consideremos la función real de dos variables

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

La gráfica de f tiene ecuación
$z = 6 - 3x - 2y$
o, equivalentemente,
$3x + 2y + z = 6$
que (como sabemos) representa un plano.



La función del ejemplo anterior es un caso especial de **función lineal** de dos variables. Las funciones de esta clase tienen la forma general

$$f(x, y) = ax + by + c$$

donde a, b y c son números reales (constantes).

Las funciones lineales se pueden generalizar por analogía para tres o más variables independientes y (como veremos más adelante) desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

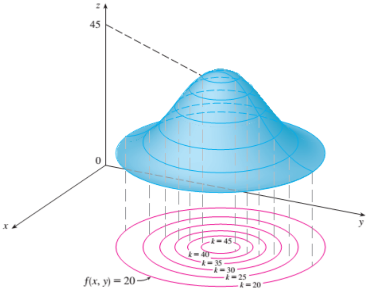
FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

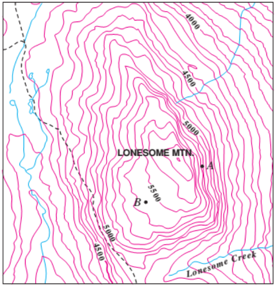
FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES: Representación visual

- Mediante **curvas de nivel**

Las **curvas de nivel** de f son las gráficas, en el plano xy, de las ecuaciones con forma $f(x, y) = k$, donde k es una constante en el rango de f.

Un ejemplo común de la utilización de curvas de nivel se encuentra en los mapas topográficos de regiones montañosas [*ver figuras a continuación*].





Observaciones:

- Cuando un punto (x, y) en el dominio de f "se mueve" sobre una misma curva de nivel, los valores $f(x, y)$ de la función no cambian, (por lo tanto, tampoco cambia la "altura" o el "nivel" correspondiente a estos puntos en la gráfica de f)
- La curva de nivel con ecuación $f(x, y) = k$ no es otra cosa que la traza de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$, proyectada en el plano xy.
- Dibujando varias curvas de nivel (en el plano xy) y trasladando o imaginando cada una de ellas a la altura indicada por la constante correspondiente, nos podemos formar una imagen mental de la gráfica de la función $f(x, y)$. Para ello, generalmente resulta conveniente tomar **valores equidistantes** de k.

La teoría desarrollada en esta sección se generaliza de manera completamente análoga para funciones de tres o más variables. Sin embargo, debemos tener en cuenta algunas consideraciones:

- Si f es una función de tres variables, digamos x, y y z, las gráficas (tridimensionales) de las ecuaciones de la forma $f(x, y, z) = k$ con k en el contradominio de f, se llaman **superficies de nivel** de f. Leer EJEMPLO 15, p. 887.
- No se puede esbozar una "gráfica" (en el sentido antes definido) de funciones de tres o más variables (ya que nuestro espacio es tridimensional y esto implicaría "dibujar" en cuatro dimensiones o más).

Queda para el alumno...
Leer con atención la subsección correspondiente (p.886-887).