Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL

INTEGRALES DE SUPERFICIES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables
(7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

INTEGRLALES DE SUPERFICIE

Repasemos...

• Las **integrales simples** se definen sobre "regiones" unidimensionales (intervalos en la recta real).

• Las **integrales dobles** se definen sobre regiones bidimensionales (regiones planas).

• Las **integrales triples** se definen sobre regiones en tres dimensiones (sólidos).

• Las **integrales de línea** (o **curvilíneas**) se evalúan a lo largo de curvas bidimensionales (que, podríamos decir, constituyen "contornos" de regiones planas, o parte de ellos) y también sobre curvas tridimensionales.

A continuación, veremos que...

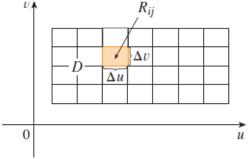
• Las **integrales de superficie**, como su nombre lo indica, se evalúan sobre superficies (es decir, sobre "cáscaras" de sólidos, o parte de ellas).

La relación que existe entre las integrales de superficie y área de una superficie es la misma que hay entre integrales de línea y longitud de arco de una curva.

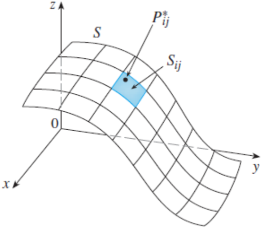
Sea S una superficie descripta por la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

Para **definir** la **integral de superficie** de una **función escalar** f sobre S:



1° Supongamos que el dominio D del parámetro es un **rectángulo** y dividamos a D en mn sub-rectángulos iguales R_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ de dimensiones Δu y Δv.



2° Dividamos la superficie S en los nm “parches” S_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ cuyas proyecciones en el plano xy son los correspondientes R_{ij}.

3° Elijamos un “punto muestra” P_{ij}^* en cada S_{ij}, calculemos el valor de f en dichos puntos para luego multiplicarlo por el área ΔS_{ij} del parche S_{ij}.

4° Consideremos la *Suma de Riemann* conformada por los términos obtenidos en el paso anterior: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right)\Delta S_{ij}$

Finalmente, tomemos el límite de esta suma cuando la cantidad de subdivisiones de D (y, por lo tanto, de S) tienden a infinito, haciendo:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z)\, dS = \underset{m,n \to \infty}{lím} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(P_{ij}^*\right) \Delta S_{ij}}$$

Ahora, veamos cómo **evaluar** la integral de superficie antes definida...

Aproximemos el área de cada parche S_{ij} ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$) mediante el área de un paralelogramo "que se le parezca" en el plano tangente (a S) en alguno de sus puntos... por ejemplo,

$$\Delta S_{ij} \approx \left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right| \Delta u \Delta v$$

donde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

son los vectores tangentes (a S) en un vértice de S_{ij}.

Luego, si en el interior de D:

- las funciones componentes de $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas
- $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ no se anulan
- $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ no son vectores paralelos

se puede demostrar (aunque no lo haremos en este curso), utilizando la definición anterior, la siguiente fórmula, válida aún cuando D no es un rectángulo:

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA}$$

Notación: Se debe tener presente que $f(\mathbf{r}(u,v))$ representa el valor de f en el punto final del vector posición de $\mathbf{r}(u,v)$, es decir,

$$f(\mathbf{r}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

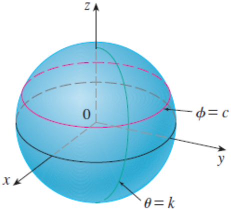
Como vemos, esta fórmula permite evaluar una **integral de superficie** convirtiéndola en una **integral doble** sobre el dominio D del parámetro.

EJEMPLO 1 [p.1111-1112]: Calcular la integral de superficie $\iint_S x^2\, dS$ donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución: Tomando $\rho = 1$ en las ecuaciones para convertir coordenadas esféricas a rectangulares se obtienen las sig. ecuaciones paramétricas para S:

$$x = \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \cos\phi$$

$$0 \le \phi \le \pi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$



Entonces, la ecuación vectorial correspondientes es

$$\boxed{\mathbf{r}(\phi,\theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}, \quad (\phi,\theta) \in D = [0,\pi] \times [0, 2\pi]}$$

Por otra parte, en este caso,

$$\mathbf{r}_\phi = \cos\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \cos\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j} - \operatorname{sen}\phi\, \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_\theta = -\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi \cos\theta\, \mathbf{j}$$

y no es difícil comprobar (*ver* p.1105-1106) que

$$\boxed{\left|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\right| = \operatorname{sen}\phi}$$

Luego, aplicando la fórmula anterior...

$$\iint\limits_S x^2\,dS = \iint\limits_D (\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta)^2\,|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\theta\,\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\,\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\,\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi\,\cos^2\phi)\,d\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

Aquí se usan las identidades

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$$

Observación: En general, cuando $f(x,y,z)$ es la función constantemente igual a 1 sobre una superficie S, de la fórmula dada resulta

$$\boxed{\iint_S 1 dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA \overset{\text{Sec.16.6}}{=} A(S)}$$

Las integrales de superficie tienen, además, muchas aplicaciones similares a las de las otras clases de integrales que hemos visto...

Por ejemplo: Supongamos que una hoja delgada de aluminio tiene

- *forma* de cierta superficie S,
- *densidad* (masa por unidad de área) en el punto (x,y,z) dada por $\rho(x,y,z)$,

entonces, la *masa total* de la lámina es

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\, dS$$

y el *centro de masa* es $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)dS \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)dS \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)dS$$

Para el caso especial en que la superficie S es **gráfica de una función**

$$z = g(x, y)$$

se puede parametrizar fácilmente haciendo

$$x(u, v) = u \qquad y(u, v) = v \qquad z(u, v) = g(u, v) \qquad (u, v) \in D = dom($$

(Llamamos a los parámetros "u" y "v", como al principio). Entonces, la correspondiente ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D = dom(g)$$

y así, tenemos que

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{k}$$

y, por lo tanto,

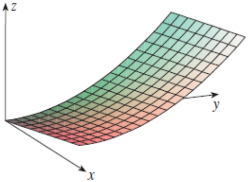
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \partial g/\partial u \\ 0 & 1 & \partial g/\partial v \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial g}{\partial u}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial g}{\partial v} - 0\right)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} \\ &= -\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

Luego, en este caso, la fórmula general

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA$$

resulta en

$$\boxed{\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(u,v,g(u,v))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + 1}\,dA}$$



EJEMPLO 2 [p.1113]**:** Evaluar $\iint_S y\,dS$ donde S es la superficie $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Solución: Tomando

$x = u$, $y = v$, $z = u + v^2$, $D = [0,1] \times [0,2]$

como parametrización de S, la fórmula anterior da

$$\iint_S y\,dS = \iint_D v\sqrt{1^2 + (2v)^2 + 1}\,dA = \iint_D v\sqrt{2+4v^2}\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 v\sqrt{2+4v^2}\,du\,dv = \ldots = \frac{13\sqrt{2}}{3} \quad \blacksquare$$

También, en algunos casos, resulta conveniente proyectar a S en el plano xz (despejando la variable "y" en su ecuación) o en el plano yz (despejando "x") y surgen fórmulas similares...

Si S está representada por la ecuación $y = h(x, z)$, entonces se puede hacer $x = u$, $z = v$, $y = h(u, v)$ y

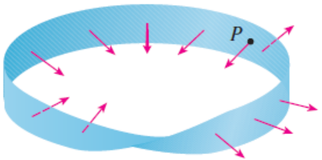
$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(u, h(u, v), v) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 + 1}\, dA$$

Si S está representada por la ecuación $x = k(y, z)$, entonces se puede hacer $y = u$, $z = v$, $x = k(u, v)$ y

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(u, v, k(u, v)) \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial v}\right)^2 + 1}\, dA$$

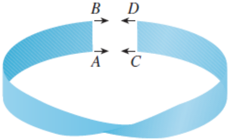
SUPERFICIES ORIENTADAS

Para definir y trabajar con integrales de superficies de campos vectoriales es necesario asignar una orientación a las superficies de interés...
Un caso típico de superficie que NO se puede orientar es conocida como la **banda de Möbius** (en honor al geómetra *August Möbius*, 1790-1868).



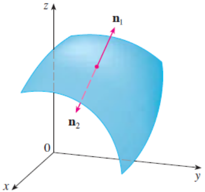
Si una hormiga caminara por la banda de Möbius empezando en cualquier punto fijo P, podría dar por terminado su recorrido pisando el mismo punto P pero en el "otro lado" de la superficie... Esto ocurre porque, en realidad, la banda de Möbius tiene sólo un lado.

Ejercicio: Construir una banda de Móbius con una cinta de papel (como se indica en la fig. abajo) y comprobarlo trazando el camino de la hormiga.

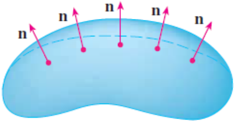


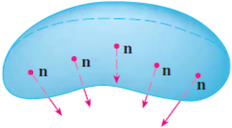
De aquí en adelante, sólo se consideran superficies susceptibles de ser orientadas, es decir, que tengan dos lados...

Sea S una superficie que tiene un **plano tangente** en cada uno de sus puntos (x, y, z) (excepto en los de la frontera, *si es que la incluyera*). Entonces, hay dos **vectores unitarios normales** a dicho plano (y a S) en (x, y, z), digamos $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, donde $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.



Si es posible elegir un vector unitario normal $\mathbf{n}$ en todos los puntos de S (salvo en la frontera) de modo que este varíe "continuamente" sobre ella, entonces se dice que S es una **superficie orientada** (u **orientable**) y su **orientación** queda determinada por la elección de $\mathbf{n}$ (entre las dos posibles).





Volviendo al caso especial en que la superficie S es gráfica de una función

$$z = g(x, y)$$

(g diferenciable) lo más práctico suele ser llamar a los parámetros (que veníamos llamando "u" y "v") como las variables independientes, es decir, "x" e "y", con lo cual la correspondiente ecuación vectorial resulta

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + g(x, y)\mathbf{k} \qquad (x, y) \in D = dom(g)$$

y así, tenemos que el vector

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

es perpendicular al plano tangente a la gráfica de g en cada punto $(x, y, g(x, y))$, y puede, por lo tanto, ser utilizado para asociar a S una orientación positiva "natural" dada por el vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

Observación: La componente de **k** de este vector es positiva, por lo que orienta a S *hacia arriba*.

En general, si la superficie S es suave y orientable, dada paramétricamente con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

entonces, automáticamente adquiere la orientación proporcionada por el vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\left|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right|}$$

y la otra orientación se consigue con el vector $-\mathbf{n}$.

EJEMPLO DE LA PÁGINA 1116 (continuación del ejemplo 4 de la sección 16.6)

INTEGRALES DE SUP. DE CAMPOS VECTORIALES

Anteriormente, hemos aprendido a evaluar integrales de línea de campos vectoriales utilizando integrales de línea de funciones escalares...
Definiremos ahora las integrales de superficie de campos vectoriales mediante integrales de superficie de funciones escalares (desarrolladas en la clase anterior).

Definición (integral de superficie de un campo vectorial)

Sea $\mathbf{F}(x, y, z)$ *un campo vectorial tridimensional continuo sobre una superficie* S *orientada según el vector normal dado por* $\mathbf{n}(x, y, z)$ *en cada punto* (x, y, z). *La integral de superficie de* $\mathbf{F}$ *sobre* S *es*

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\; dS$$

En notación abreviada:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Si la superficie suave S tiene ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

y la orientación proporcionada por el vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS = \iint_D \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \; dA$$

donde la úntima igualdad surge de aplicar la fórmula para integral de superficie para una función escalar, resultando, finalmente, la siguiente fórmula para su evaluación:

$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\; dA}$$

Esta integral de superficie se suele llamar también **integral de flujo** por sus principales aplicaciones...

Para las **integrales de línea de campos vectoriales** una de sus aplicaciones más importantes tiene que ver con campos de fuerza, ya que permiten calcular el **trabajo** realizado a lo largo de una curva regular C...

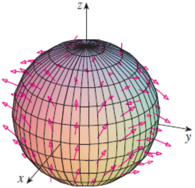
Las **integrales de superficie de campos vectoriales** también aparecen con frecuencia en esta disciplina y su principal interpretación es una medida del **flujo** a través de la superficie cuando el campo vectorial en el integrando es un campo de fuerza...

En efecto: Supongamos que S es una superficie orientada con vector normal unitario dado por $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada uno de sus puntos.

- Imaginemos que un fluído circula a través de S con de *densidad* dada por la función escalar $\rho(x, y, z)$ y *velocidad* dada por el campo vectorial $\mathbf{v}(x, y, z)$.
- Entonces, el *caudal* (masa por unidad de tiempo) que atraviesa a S *por unidad de área* es $\rho\mathbf{v}$ en cada punto (x, y, z) de S.
- En este caso, $\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ da el *caudal total* que atraviesa a S.

Otros ejemplos aplicados incluyen *flujo eléctrico* (cuando $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico), *flujo de calor*, etc... **Recomendación:** Leer el EJEMPLO 6 (p.1120) y los comentarios previos (p.1119).

EJEMPLO 4 [p.1117-1118]: Determinar el **flujo** del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.



Solución: Como en el ejemplo 1, se puede utilizar para esta esfera la representación vectorial paramétrica

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{r}(\phi,\theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \\ (\phi,\theta) \in D = [0,\pi]\times[0,2\pi]\end{array}}$$

Entonces, tenemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta)) = \cos\phi\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \overset{\text{comprobarlo!}}{\ldots} = \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta))\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta) &= \cos\phi\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\cos\phi \\ &= 2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Luego, aplicando la fórmula correspondiente...

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \cos \theta + \operatorname{sen}^3 \phi \operatorname{sen}^2 \theta)\, d\phi\, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \qquad \left(\text{ya que} \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = 0\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

Posible interpretación del resultado: Si, por ejemplo, el campo vectorial **F** representara aquí el flujo de un fluido cuya densidad es 1 ($\rho(x, y, z) = 1$ en la descripción anterior), entonces $4\pi/3$ representa el *caudal a través de la esfera unitaria* centrada en el origen (en unidades de masa por unidad de tiempo) ■

En el caso de una superficie S dada por una gráfica $z = g(x, y)$, podemos considerar a x y y como parámetros y usamos la ecuación 3 para escribir

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Entonces la fórmula 9 se convierte en

10
$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA}$$

Esta fórmula toma la orientación hacia arriba de S; para una orientación hacia abajo multiplicamos por -1. Es posible resolver fórmulas similares si S está dada por $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$. (Véanse los ejercicios 37 y 38.)

Ejercicio: Leer el EJEMPLO 5 (p.1118-1119) en el libro de cabecera del curso (*Stewart*).