Unidad 4
CÁLCULO VECTORIAL
CAMPOS VECTORIALES

Libro de referencia principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7ma Edición)

Autor:

James Stewart

Plataforma virtual del curso: https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

CAMPOS VECTORIALES

Estudiaremos ahora otra clase de funciones cuyas imágenes (o valores) son también vectores: los **campos vectoriales**.

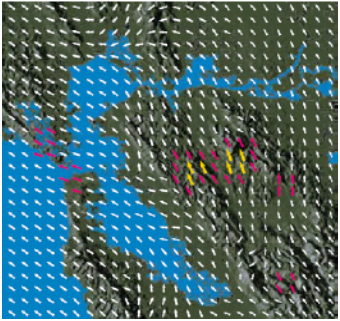
- Se trata de funciones que asignan vectores bidimensionales a puntos en el plano, o bien, vectores tridimensionales a puntos en el espacio.
- Podríamos pensar en estos campos vectoriales como una clase especial de funciones vectoriales de dos o de tres variables.

Tales funciones vectoriales motivan la definición de nuevas clases de integrales cuyas conexiones con las integrales simples, dobles y triples (*con las que ya hemos trabajado*) generan varios de los teoremas de mayor importancia teórica y práctica del cálculo vectorial:
T. DE GREEN, T. DE STOKES y T. DE GAUSS.

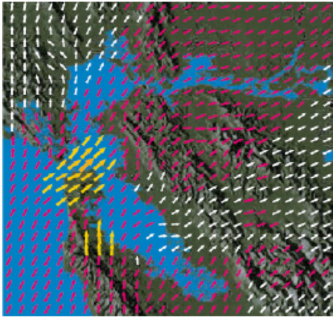
Dichos resultados pueden considerarse versiones, en dimensiones más altas, del conocido Teorema Fundamental del Cálculo (en una variable).

EJEMPLO [p.1056 (1)]

Observemos las siguientes figuras...



1 de marzo de 2010 - 6:00 a.m.



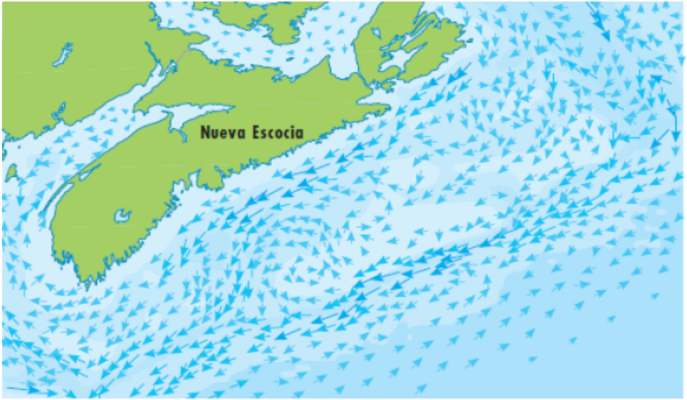
1 de marzo de 2010 - 6:00 p.m.

Las flechas en estas figuras son **vectores velocidad** que indican rapidez y dirección del viento en ciertos puntos que se encuentran 10 metros por encima de la superficie, en el área de la *Bahía de San Francisco*, en determinados instantes (fijos) de tiempo. Observación: En el mismo día, los patrones de viento varían notablemente trás 12 horas de diferencia.

Éste es un ejemplo de un **campo vectorial de velocidad**.

EJEMPLO [p.1056 (2)]

Otro **campo vectorial de velocidad** se presenta en la siguiente figura...



corrientes oceánicas alrededor de la costa de Nueva Escocia

Otros ejemplos típicos de campos vectoriales que surgen con frecuencia en las aplicaciones son los llamados **campos de fuerza**.

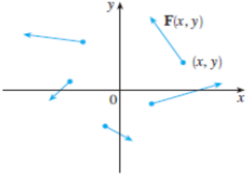
EJERCICIO: Leer con especial atención el **EJEMPLO 4** [p.1059-1060] (**campo de fuerza gravitacional**).

Definición (**campos vectoriales**)

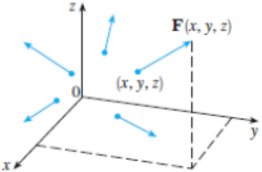
- *Un* **campo vectorial en dos dimensiones** *(o* **sobre** $\mathbb{R}^2$*) es una función* $\mathbf{F}$ *que asigna a cada punto* (x, y) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^2$ *un único vector bidimensional* $\mathbf{F}(x, y)$.
- *Un* **campo vectorial en tres dimensiones** *(o* **sobre** $\mathbb{R}^3$*) es una función* $\mathbf{F}$ *que asigna a cada punto* (x, y, z) *en cierto subconjunto* D *de* $\mathbb{R}^3$ *un único vector tridimensional* $\mathbf{F}(x, y, z)$.

¿Qué se puede decir, en estos casos, de *dom* $(\mathbf{F})$? ¿y de *rg* $(\mathbf{F})$?

La mejor manera de obtener una imagen visual de un campo vectorial es elegir un subconjunto representativo de puntos en su dominio y dibujar el vector imagen de cada uno de ellos iniciando en el punto correspondiente.



campo vectorial bidimensional



campo vectorial tridimensional

Por un razonamiento análogo al realizado para funciones vectoriales de una variable, también los campos vectoriales pueden expresarse en términos de sus **funciones componentes:**

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial bidimensional, se puede escribir

$$\boxed{\mathbf{F}(x,y) = P\left(x,y\right)\mathbf{i} + Q\left(x,y\right)\mathbf{j} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F}(x,y) = \left\langle P\left(x,y\right), Q\left(x,y\right)\right\rangle}$$

e incluso, cuando es conveniente simplificar la notación,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F} = \langle P, Q\rangle$$

donde P y Q son funciones escalares (reales) de dos variables.

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial tridimensional, se puede escribir

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{F}(x,y,z) = P\left(x,y,z\right)\mathbf{i} + Q\left(x,y,z\right)\mathbf{j} + R\left(x,y,z\right)\mathbf{k} \\ \text{ó} \quad \mathbf{F}(x,y,z) = \left\langle P\left(x,y,z\right), Q\left(x,y,z\right), R\left(x,y,z\right)\right\rangle \end{array}}$$

o bien, simplificando la notación,

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad \text{ó} \quad \mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$$

donde P, Q y R son funciones escalares (reales) de tres variables.

Algunas veces se les llama **campos escalares** a las componentes de $\mathbf{F}$ para distinguirlas de los campos vectoriales.

EJEMPLO [p.1057 (1)]**:** Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

Describa **F** trazando y observando algunos de sus vectores imágenes.

Solución:

Puesto que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, dibujamos el vector $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ iniciando en el punto $(1, 0)$ en la figura 5. Como $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, dibujamos el vector $\langle -1, 0\rangle$ con inicio en el punto $(0, 1)$. Al continuar de este modo, calculamos varios valores representativos de $\mathbf{F}(x, y)$ en la tabla y dibujamos los vectores correspondientes para representar el campo vectorial en la figura 5.

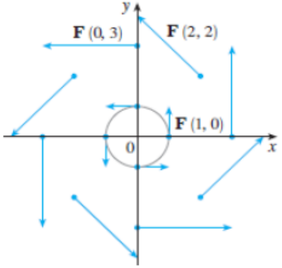


Figura 5

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Al parecer, según la figura 5, cada flecha es tangente a la circunferencia con centro en el origen. Para confirmarlo, calculemos el producto punto del vector de posición $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ con el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

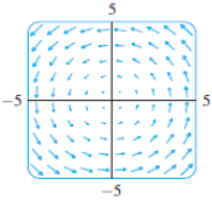
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Esto demuestra que $\mathbf{F}(x, y)$ es perpendicular al vector de posición $\langle x, y\rangle$ y, por tanto, es tangente a la circunferencia con centro en el origen y radio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe que también

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que la magnitud del vector $\mathbf{F}(x, y)$ es igual al radio de la circunferencia. ■

NOTA: Existen sistemas algebraicos computarizados que son capaces de dibujar campos vectoriales en dos o tres dimensiones y, como es de esperarse, proporcionan una representación mucho mejor de la que es posible a mano... De hecho, para la mayoría de los campos vectoriales tridimensionales se debe recurrir a uno de ellos.



$\mathbf{F}(x,y)=\langle -y,x\rangle$

Como en el caso de las funciones vectoriales de una variable, el límite de un campo vectorial bidimensional o tridimensional puede definirse a través de los límites de sus componentes...

Definición (**límite de un campo vectorial**)

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ *un campo vectorial bidimensional cuyo dominio* D *contiene puntos arbitrariamente cercanos al punto* (x, y)*. Entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathbf{F}(x, y) = \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} P(x, y)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{(x,y)\to(a,b)} Q(x, y)\right]\mathbf{j}$$

siempre que exista el límite cuando (x, y) *tiende a* (a, b) *de cada función componente.*

Nota: También se puede utilizar para este límite una definición tipo ε-δ: $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{v}$ si y sólo si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in D$ y $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ entonces $\|\mathbf{F}(x, y) - \mathbf{v}\| < \varepsilon$.

Geométricamente: Las definiciones anteriores establecen que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathbf{F}(x,y) = \mathbf{v}$$

si y sólo si la *longitud* y *dirección* del vector $\mathbf{F}(x,y)$ se aproximan a la longitud y dirección del vector $\mathbf{v}$ cuando (x,y) tiende al punto (a,b).

Definición (continuidad de campos vectoriales)

Un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ *es continuo en un punto* (a,b) *de su dominio si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(a,b)$$

Como es de esperar, estas definiciones de límite y continuidad son completamente análogas para el caso tridimensional.

EJERCICIO (todas las carreras)**:** Mostrar que el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$ es continuo en (a,b,c) si y sólo si sus funciones componentes lo son.

El campo gradiente

Recordemos...

Si f es una función escalar de las dos variables x e y, su gradiente es

$$\nabla f\left(x,y\right)=f_x\left(x,y\right)\mathbf{i}+f_y\left(x,y\right)\mathbf{j}$$

en cada punto $\left(x,y\right)$ del plano donde ambas derivadas parciales existen.

De este modo, ∇f asocia un vector bidimensional con cada uno de dichos puntos y define, por lo tanto, un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$.

Análogamente...

Si f es una función escalar de las tres variables x, y y z, su gradiente es

$$\nabla f\left(x,y,z\right)=f_x\left(x,y,z\right)\mathbf{i}+f_y\left(x,y,z\right)\mathbf{j}+f_z\left(x,y,z\right)\mathbf{k}$$

en cada punto $\left(x,y,z\right)$ del espacio donde las derivadas parciales existen.

Así, ∇f asocia un vector tridimensional con cada uno de tales puntos, generando un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$.

Estos campos vectoriales aparecen en numerosas aplicaciones y cada uno de ellos es llamado **campo vectorial gradiente**.

EJEMPLO [p.1060 (6)]**:** Encuentre el campo vectorial gradiente de

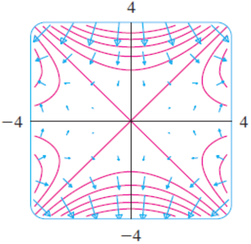
$$f(x, y) = x^2 y - y^3$$

Luego, represente gráficamente dicho campo vectorial junto con un mapa de contorno (curvas de nivel) de f.

Solución: El campo vectorial gradiente de f está dado por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + \left(x^2 - 3y^2\right)\mathbf{j}$$

La fig. siguiente muestra un mapa de contorno de f y su campo gradiente:



Observaciones:

- Los vectores gradientes son "perpendiculares" a las curvas de nivel (*recordar la sección* 14.6).
- Los vectores gradientes son más largos donde más cercanas entre sí son las curvas de nivel.

La razón de esto último es que la longitud del vector gradiente es el valor de una derivada direccional de f y curvas de nivel cercanas indican una gráfica (de la función f) con fuerte pendiente.

Definición (campo vectorial conservativo)

Un campo vectorial **F** *se denomina* **conservativo** *si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que* $\mathbf{F} = \nabla f$.

En esta situación, f recibe el nombre de **función de potencial** *para* **F**.

No todos los campos vectoriales son conservativos, pero tales campos surgen con frecuencia en Física...

EJEMPLO [p.1061]**:** El campo de fuerza gravitacional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{mMG}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)$$

del EJEMPLO 4 (p. 1059) es conservativo y su función de potencial es

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

EJERCICIO: Verificar que $\nabla f = \mathbf{F}$ (en este ejemplo) ■