Unidad 3
INTEGRALES MÚLTIPLES

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

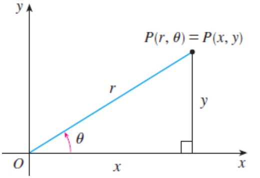
James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

INTRODUCCIÓN

Hemos visto que... En la geometría plana, un *sistema de coordenadas polares* puede servir para dar una descripción más conveniente, mediante ecuaciones (o inecuaciones) en dos variables, de ciertas curvas y regiones cuya representación en coordenadas rectangulares (o cartesianas) resulta bastante más engorrosa.



$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

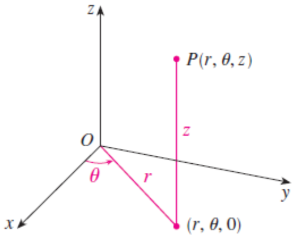
Análogamente... Los *sistemas* (tridimensionales) *de coordenadas cilíndricas* y *esféricas* suelen utilizarse para simplificar ecuaciones (o inecuaciones) rectangulares en tres variables, generando así descripciones más adecuadas de ciertas superficies y sólidos.

> En cualquiera de estos casos, su principal aplicación es la de hacer más sencilla la evaluación de integrales múltiples que los involucran.

Coordenadas cilíndricas

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio tridimensional es representado por la terna (r, θ, z) donde:

- r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy,
- z es la distancia dirigida de P al plano xy (e.d., la tercer coordenada rectangular de P).



Se sigue que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un mismo punto P satisfacen las relaciones:

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Nota: *Se recomienda a los estudiantes que no estén familiarizados con las ecuaciones en coordenadas cilíndricas y sus representaciones en el espacio tridimensional, ver detenidamente los* EJEMPLOS 1(p.1028) *y* 2(p.1029).

INTEGRALES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Ahora, si E es un sólido acotado por gráficas de ecuaciones en coordenadas cilíndricas, la integral triple sobre E de una función de tres variables, se puede definir también con procedimientos análogos a los realizados para el caso de las coordenadas rectangulares...

Nota: *En este curso, omitiremos los detalles de dicha definición; no obstante, los estudiantes que así lo deseen, pueden profundizar en ellos, para un caso particularmente sencillo, en las pág.* 908-909 *del libro* "Cálculo con Geometría Analítica" (2ª Ed.) *de* EARL W. SWOKOSKI *(sugerido como bibliografía complementaria).*

Por otra parte, a modo de reglas prácticas, se pueden demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) los siguientes resultados para la evaluación de integrales triples en coordenadas cilíndricas...

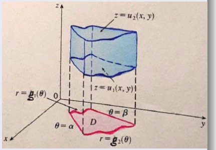
Teorema (evaluación de integrales triples en coordenadas cilíndricas I)

Sea D una región plana acotada por dos rayos que forman ángulos no negativos α y β con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$, donde g_1 y g_2 son funciones continuas tales que $g_1(\theta) \le g_2(\theta)$ para todo θ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. De este modo:

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$

Sea E un sólido cuya proyección en el plano xy es D:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$



donde u_1 y u_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la región D. Entonces, la integral triple de una función f continua sobre E se puede evaluar como sigue:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta, z)\, r\, dz dr d\theta$$

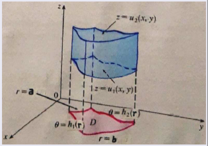
Teorema (evaluación de integrales triples en coordenadas cilíndricas II)

Sea D una región acotada por los arcos de dos circunferencias centradas en el origen, de radios a y b respectivamente, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde h_1 y h_2 son funciones continuas tales que $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo r en el intervalo $[a, b]$:

$$D = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\ \}$$

Sea E un sólido cuya proyección en el plano xy es D:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



donde u_1 y u_2 son funciones con primeras derivadas parciales continuas en toda la región D. Entonces, la integral triple de una función f continua sobre E se puede evaluar como sigue:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\,sen\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,sen\,\theta, z)\, r\, dz d\theta dr$$

V EJEMPLO 3 Un sólido E se encuentra dentro de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$, por debajo del plano $z = 4$, y por encima del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase la figura 8). La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del eje del cilindro. Encuentre la masa de E.

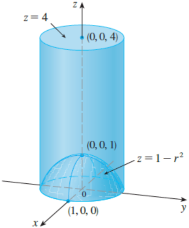
SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas, el cilindro $r = 1$ y el paraboloide es $z = 1 - r^2$, así que podemos escribir

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia del eje z, la función densidad es

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Por tanto, de la fórmula 15.7.13, la masa de E es



$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

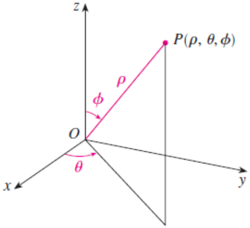
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta = K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

Coordenadas esféricas

En un sistema de coordenadas esféricas, un punto P del espacio tridimensional es representado por la terna (ρ, θ, ϕ) donde:

- $\rho = \left\| \overrightarrow{OP} \right\|$ es la distancia de P al origen ($\rho \geq 0$),
- θ es la segunda coordenada cilíndrica de P (ángulo polar de la proyección de P en el plano xy),
- ϕ es el ángulo entre el semieje z positivo y $\overrightarrow{OP}$.



Se sigue que las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) de un mismo punto P satisfacen las relaciones:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Nota: *Se recomienda a los estudiantes que no estén familiarizados con las ecuaciones en coordenadas esféricas y sus representaciones en el espacio tridimensional, ver detenidamente los* EJEMPLOS 1 *y* 2 (p.1034).

INTEGRALES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, si E es un sólido acotado por gráficas de ecuaciones en coordenadas esféricas, la integral triple sobre E de una función de tres variables, se puede definir con procedimientos análogos a los realizados en coordenadas rectangulares, considerando particiones internas y sumas de Riemann apropiadas...

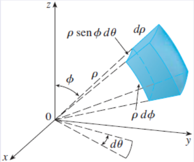
Nota: *Aunque aquí omitiremos los detalles de también de esta definición, los estudiantes que así lo deseen, pueden profundizar en ellos, para un caso particularmente sencillo, en las pág. 1034-1035 del libro de cabecera del curso, y/o en las pág.* 910-911 *del libro* "Cálculo con Geometría Analítica" (2ª Ed.) *de* EARL W. SWOKOSKI *(sugerido como bibliografía complementaria).*

Por otra parte, a modo de regla práctica, se pueden demostrar (*aunque no lo haremos en este curso*) el siguiente resultado básico para la evaluación de integrales triples en coordenadas esféricas...

Teorema (evaluación de integrales triples sobre cuñas esféricas)

Sea f una función continua sobre una región de la forma:

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b, \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d\}$$



Entonces:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV =$$

$$\int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \ sen\ \phi \ cos\ \theta, \rho \ sen\ \phi \ sen\ \theta, \rho \ cos\ \phi)\, \rho^2 \, sen\ \phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Nota: Las coordenadas esféricas también pueden utilizarse en sólidos más complicados que la región elemental E considerada en el teorema anterior, en cuyo caso los límites de integración podrían ser funciones de una o dos variables que deben escogerse cuidadosamente de manera similar a los casos antes formulados para coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Ejercicio: Escribir una fórmula similar a la del teorema anterior que permita evaluar $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ cuando E es la "región esférica" más general $\{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\}$.

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV$, donde B es la bola unitaria.

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

SOLUCIÓN Puesto que el límite de B es una esfera, se usan coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Además, las coordenadas esféricas son apropiadas porque

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Así, $\boxed{3}$ da

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\, d\rho$$

$$= \big[-\cos\phi\big]_0^\pi (2\pi) \left[\tfrac{1}{3}e^{\rho^3}\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e-1)$$

Nota: Habría sido extremadamente difícil evaluar la integral de este ejemplo en coordenadas rectangulares:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dz\, dy\, dx$$