# Unidad 3
# INTEGRALES MÚLTIPLES

## CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

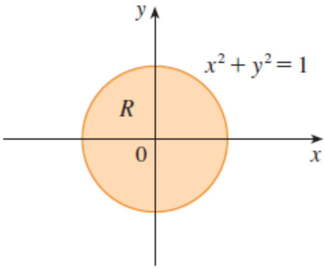
James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

Supongamos (por ejemplo) que se desea evaluar la integral doble

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dA$$

donde $R$ es la siguiente región:




Para hacerlo (como hemos aprendido), se requiere determinar las variaciones de $x$ y de $y$ en $R$ (que darán lugar a los límites de integración).

No obstante, si se describe $R$ mediante coordenadas rectangulares, expresar tales variaciones puede resultar engorroso...

En efecto:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Entonces, si se considera "primero" la variable $x$ (tratando a $R$ como una región *tipo I*):

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

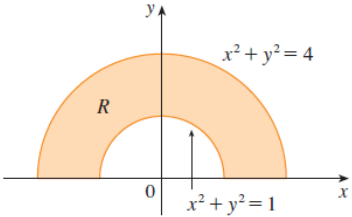
Es decir:

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

Luego:

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx$$

Con frecuencia se presentan casos aún más complicados... Por ejemplo:



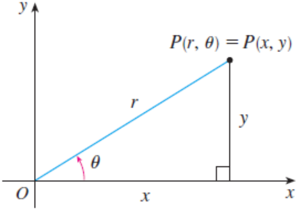
Una alternativa para hacer frente a esta dificultad sería representar estas regiones utilizando coordenadas polares...

**Recordatorio:** Las coordenadas polares $(r, \theta)$ de un punto $P$ en el plano se relacionan con sus coordenadas rectangulares $(x, y)$ mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

donde $r$ indica la distancia de $P$ al origen y $\theta$ es la medida, tomada en sentido antihorario (positivo), del ángulo comprendido entre el *eje polar* (semieje $x$ positivo) y la semirrecta que nace en el origen y pasa por $P$.

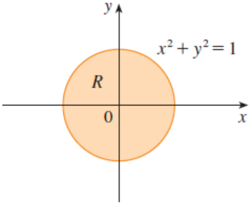
En efecto:



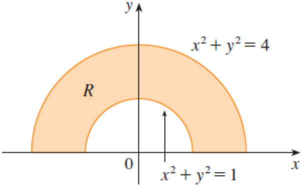

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

**EJEMPLO:** Para las dos regiones consideradas anteriormente tenemos




y

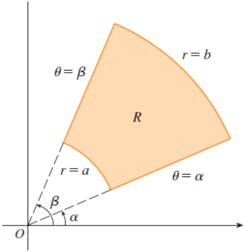



$\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $\{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$

Estos son casos particulares de una clase de regiones denominadas rectángulos polares. En general, se un **rectángulo polar** es cualquier región plana que se puede expresar mediante un conjunto de la forma

$$\{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

siendo $a$, $b$, $\alpha$ y $\beta$ números reales (fijos) tales que $0 \leq a, b$ y $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$.



# INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

## SOBRE RECTÁNGULOS POLARES

Mediante una serie de pasos análogos a los realizados en coordenadas rectangulares, se puede definir la **integral doble sobre un rectángulo polar** también como límite de una doble *suma de Riemann* (el estudiante interesado en los detalles puede encontrarlos en la pág.998-999).

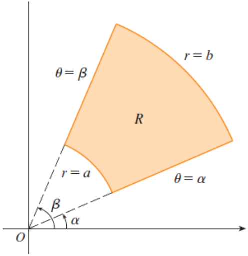



**FIGURA 3** Rectángulo polar

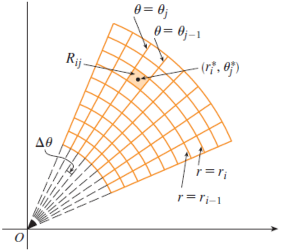



**FIGURA 4** División de $R$ en subrectángulos

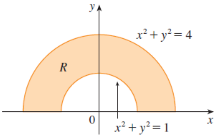
$$\iint_R f(x,y)\, dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \cos\theta_j^*\right)\Delta A_i$$

## Teorema (evaluación de integrales dobles sobre rectángulos polares)

*Si $f$ es una función real de dos variables que es continua sobre un rectángulo polar $R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, entonces*

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r dr d\theta$$

**EJEMPLO 1** (p.999): Evaluar $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$ donde $R$ es la región en el semiplano superior, acotada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.




**Solución:** En este caso, $f(x, y) = 3x + 4y^2$ y
$R = \{(x, y) \mid 0 \leq y,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ o bien, en coordenadas polares,
$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Luego, por el teorema anterior,

$$\begin{aligned}\iint_R (3x + 4y^2)\, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 \left[3(r\cos\theta) + 4(r \operatorname{sen}\theta)^2\right] r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 \left(3r^2 \cos\theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2\theta\right) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos\theta + r^4 \operatorname{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \ldots = \frac{15}{2}\pi \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Los “rectángulos polares” no son las únicas regiones en el plano cuya descripción en este tipo de coordenadas resulta notablemente más sencilla que su correspondiente en coordenadas rectangulares...

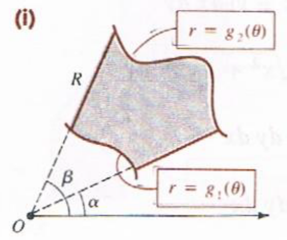
La definición de integral doble de una función de dos variables se puede extender, también en este contexto, a ciertas regiones planas de formas más generales, para las cuales la ventaja de simplicidad ofrecida por el uso de coordenadas polares repercute en el cálculo de dichas integrales.

Además, a modo de reglas prácticas, se pueden demostrar (aunque no lo haremos en este curso) los siguientes teoremas de evaluación de integrales dobles en coordenadas polares...

## Teorema (evaluación de integrales dobles en coordenadas polares I)

*Sea $D$ una región acotada por dos rayos que forman ángulos positivos, $\alpha$ y $\beta$, con el eje polar, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$, donde $g_1$ y $g_2$ son funciones continuas tales que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ para todo $\theta$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. De este modo:*

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$



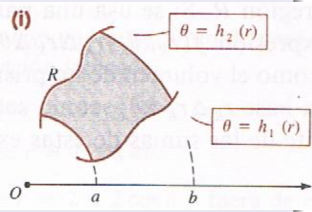

*Si $f$ es una función de dos variables continua en $D$, entonces*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr d\theta$$

## Teorema (evaluación de integrales dobles en coordenadas polares II)

*Sea $D$ una región acotada por los arcos de dos circunferencias centradas en el origen, de radios $a$ y $b$ respectivamente, y por las gráficas de dos ecuaciones polares $\theta = h_1(r)$ y $\theta = h_2(r)$, donde $h_1$ y $h_2$ son funciones continuas tales que $h_1(r) \leq h_2(r)$ para todo $r$ en el intervalo $[\alpha, \beta]$. De este modo:*

$$D = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r)\ \}$$




*Si $f$ es una función de dos variables continua en $D$, entonces*

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, d\theta dr$$

**Nota:** Las **regiones elementales** consideradas en los dos teoremas previos tienen, a la hora de evaluar integrales dobles en coordenadas polares, un rol análogo al de las regiones de tipo I y de tipo II utilizadas al trabajar con integrales dobles en coordenadas rectangulares.

Resumiendo: Como se comentó antes, en condiciones adecuadas, se puede y suele resultar conveniente transformar una integral doble en coordenadas rectangulares a una integral doble en coordenadas polares. Para ello:
1° Se sustituyen en el integrando las variables $x$ e $y$ por $r\ \text{cos}\theta$ y $r\ \text{sen}\theta$, respectivamente.
2° Se sustituye en la integral iterativa correspondiente, "$dydx$" (o bien, "$dxdy$") por "$r\ drd\theta$" (o bien, "$r\ d\theta dr$").
3° Los límites de integración se expresan en forma polar.
La siguientes fórmulas resumen estos tres pasos:

$$\iint_D f(x,y)\ dydx = \iint_D f(r\ \text{cos}\theta, r\ \text{sen}\theta)\ r\ drd\theta$$

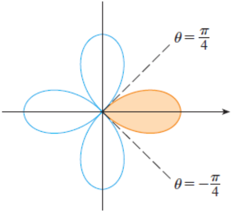
o bien,

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_D f(r\ \text{cos}\theta, r\ \text{sen}\theta)\ r\ d\theta dr$$

**Otras consideraciones:**

- Bajo hipótesis adecuadas, las propiedades estudiadas para las integrales dobles en coordenadas rectangulares son válidas también para las integrales dobles en coordenadas polares.
- Si $f(x, y) = 1$ en toda $D$, entonces la integral en cada uno de los teoremas de evaluación es igual al área de $D$.
- Si el integrando $g(r, \theta) = rf(r\ \cos\theta, r\ \operatorname{sen}\theta) \geq 0$ en toda $D$, entonces la integral en cada uno de los teoremas de evaluación puede interpretarse como el volumen de un sólido.
    - Sin embargo, en este punto, la diferencia principal con las coordenadas rectangulares es que se considera como cota superior de dicho sólido a la superficie $S$ que es gráfica de la ecuación $z = g(r, \theta)$ en *coordenadas cilíndricas* (*veremos esta clase de coordenadas más adelante*).

**EJEMPLO 3** (p.1000): Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$




**Solución:** En este caso, $f(x, y) = 1$ y puede expresarse

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Luego, aplicando la fórmula del teorema de evaluación I, se obtiene

$$\mathrm{A}(D) = \iint_D 1 dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r\ dr d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} \left(\cos^2 2\theta - 0^2\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\ d\theta = \ldots = \frac{1}{8}\pi \quad \blacksquare$$

Observación: La región de este ejemplo también podría expresarse como

$$D = \left\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1,\ -\frac{1}{2} \arccos r \leq \theta \leq \frac{1}{2} \arccos r\right\}$$

y, por lo tanto, $\mathrm{A}(D)$ puede también calcularse aplicando el teorema de evaluación II. **Ejercicio!**