Unidad 3
INTEGRALES MÚLTIPLES
INTEGRALES TRIPLES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

INTEGRALES TRIPLES

Así como se definen

- **integrales simples** para funciones de *una* variable
- **integrales dobles** para funciones de *dos* variables

se definen

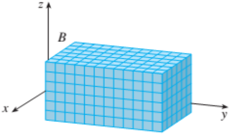
- **integrales triples** para funciones de *tres* variables.

En estas últimas centraremos ahora nuestra atención...

Sea f una función de tres variables definida sobre una "caja" rectangular
$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$

Para definir la integral triple de f sobre B, se procede como sigue:

- Se divide a B en "subcajas"...

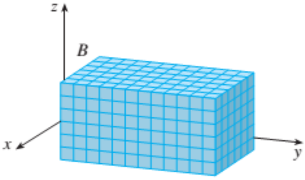


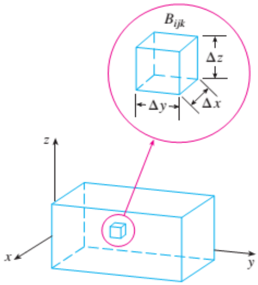
  - Se divide el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{l}$.
  - Se divide el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos $\left[y_{j-1}, y_j\right]$ de igual longitud $\Delta y = \frac{d-c}{m}$.
  - Se divide el intervalo $[r, s]$ en n subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de igual longitud $\Delta z = \frac{s-r}{n}$.

- Se consideran los planos paralelos a los planos coordenados que pasan por los puntos extremos de estos subintervalos, los cuales dividen a B en lmn subcajas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

  - $i = 1, 2, ..., l$ con $x_0 = a$ y $x_l = b$
  - $j = 1, 2, ..., m$ con $y_0 = c$ y $y_m = d$
  - $k = 1, 2, ..., n$ con $z_0 = r$ y $z_n = s$





Observación: Cada subcaja tiene volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

- Se elige un **punto muestra** $\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)$ en cada B_{ijk} y se forma la **triple suma de Riemann**

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V$$

Definición (integral triple sobre una caja rectangular)

Si f es una función de tres variables, la integral triple de f sobre la caja rectangular B es

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right)\Delta V$$

si este límite existe, en cuyo caso, se dice que f es integrable sobre B.

El significado preciso del límite anterior es el siguiente:

$$\textit{Para todo } \varepsilon > 0 \textit{ existe } N \in \mathbb{N} \textit{ tal que}$$

$$l, m, n > N \Rightarrow \left| \iiint_B f(x, y, z)\, dV - \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right) \Delta V \right| < \varepsilon$$

$$\textit{para cualquier elección de puntos muestra } \left(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*\right) \textit{ en } B_{ijk}.$$

Tener en cuenta: Si f es continua sobre una caja rectangular cerrada B, entonces f es integrable sobre B (es decir, el límite anterior existe).

Teorema (de Fubini para integrales triples)

Si f es una función de tres variables continua sobre la caja rectangular

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$$

entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dxdydz$$

La integral iterada del lado derecho del Teorema de Fubini anterior significa que se integra

- primero respecto a “x” (manteniendo a “y” y a “z” constantes);
- luego, respecto a “y” (manteniendo a “z” constante)
- y, por último, respecto a “z”.

Sin embargo, hay otros cinco órdenes de integración posibles y todos generan el mismo resultado para la integral triple del lado izquierdo. Por ejemplo, si se integra primero respecto a “y”, luego respecto a “z” y, por último, respecto a “x”, se tiene que

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\,dydzdx$$

Ejemplo 1 (p.1018). Evaluar $\iiint_B f(x,y,z)\,dV$ donde $f(x,y,z) = xyz^2$ y B es la caja rectangular

$$\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 3\}$$

INTEGRALES TRIPLES

SOBRE "CAJAS" RECTANGULARES

Solución: En primer lugar, notemos que el integrando es una función continua sobre todo $\mathbb{R}^3$ (pues es un monomio de tres variables), en particular, sobre la caja rectangular cerrada B. Entonces, aplicando el Teorema de Fubini para integrales triples,

$$\iiint\limits_B xyz^2\,dV = \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^3\int_{-1}^2\left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}dy\,dz$$

$$= \int_0^3\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy\,dz = \int_0^3\left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2}\,dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\,dz = \frac{z^3}{4}\Big]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Nota: Aunque en este ejemplo se trabajó según el orden establecido en la versión antes enunciada del Teorema de Fubini, cualquier otro orden de integración hubiera conducido al mismo resultado. (Ejercicio! Elegir un orden diferente y comprobarlo.)

Hemos visto que...

- Para integrales simples la región sobre la que se integra es siempre un intervalo.
- Cuando f es una función de dos variables, las integrales simples se pueden utilizar para calcular integrales dobles sobre rectángulos (*Teorema de Fubini para integrales dobles*) y también, en muchos casos en los cuales la región de integración es plana pero no tiene forma de rectángulo (regiones *tipo* I y/o *tipo* II).

Análogamente al caso bidimensional, si f es una función de tres variables...

- Las integrales simples se pueden utilizar para calcular integrales triples sobre cajas rectangulares (*Teorema de Fubini para integrales triples*).
- Sin embargo, nuevamente, suele resultar útil o necesario en las aplicaciones considerar regiones acotadas tridimensionales (sólidos) no "rectangulares" con el interés de integrar a f sobre ellas...

Definición (integral triple sobre una región acotada general)

Si f es una función de tres variables y E es una región acotada contenida en $\mathrm{dom}\,(f)^{*}$, la integral triple de f sobre E es

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B F(x,y,z)\,dV,$$

donde B es cualquier sólido rectangular que contiene a E y

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \in B \setminus E \end{cases}$$

siempre que F sea integrable sobre B.

Observación: Es probable que F tenga discontinuidades en los puntos frontera de E.

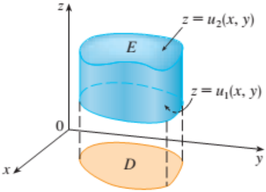
No obstante: Si f es continua y acotada sobre E, y la frontera de E es "razonablemente suave" (en un sentido fuera del alcance de este curso), se puede demostrar que F es integrable sobre B.

A continuación, estudiaremos integrales triples (de funciones continuas) sobre ciertos tipos de regiones acotadas particularmente simples cuyas fronteras son "razonablemente suaves".

Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x e y, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xy y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera inferior de E es la superficie con ecuación $z = u_1(x, y)$.

La frontera superior de E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$.

INTEGRALES TRIPLES

SOBRE REGIONES ACOTADAS GENERALES (Tipo 1)

A fin de evaluar $\iiint_E f(x,y,z)\,dV$ cuando E es una región de **tipo 1**, procediendo en forma análoga al caso correspondiente para integrales dobles, se puede demostrar que

$$\boxed{\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA}$$

En la integral interior de la derecha de esta ecuación debe entenderse que

- x e y se mantienen fijas,
- $u_1(x,y)$ y $u_2(x,y)$ son tratadas como constantes,
- $f(x,y,z)$ se integra con respecto a z.

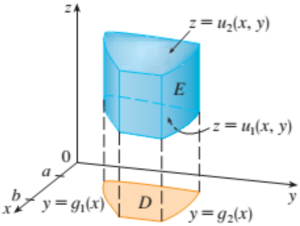
Luego, se consideran los dos casos siguientes:

1°caso: La *proyección* D de E sobre el plano xy es una región plana de *tipo I*. Entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

y la ecuación anterior se convierte en

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

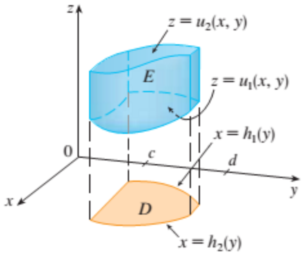


2°caso: La *proyección* D de E sobre el plano xy es una región plana de *tipo II*. Entonces

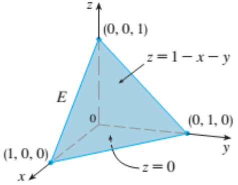
$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

y la ecuación anterior se convierte en

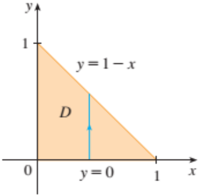
$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdxdy$$



Ejemplo 2 (p.1019): Evaluar $\iiint_E z dV$ donde E es el sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.



región sólida de integración



región plana: proyección en el plano xy de E

Solución: En este caso, podemos tomar

$$u_1(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad u_2(x, y) = 1 - x - y$$
$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = 1$$
$$g_1(x) = 0 \quad \text{y} \quad g_2(x) = 1 - x$$

De este modo, resulta

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

Esta descripción del sólido E como una región *tipo* permite evaluar la integral requerida como sigue:

$$\iiint_E z\, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx$$

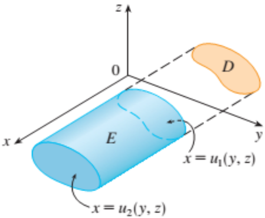
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy\, dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x}$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Se dice que una región sólida E es de **tipo 2** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables y y z, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano yz y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera “detrás” de E es la superficie con ecuación $x = u_1(y, z)$.

La frontera “delante” de E es la superficie con ecuación $x = u_2(y, z)$.

Cuando E es una región de **tipo 2**, se puede demostrar que

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA}$$

En la integral interior de la derecha de esta ecuación debe entenderse que

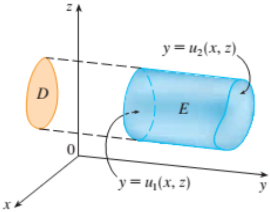
- y y z se mantienen fijas,
- $u_1(y,z)$ y $u_2(y,z)$ son tratadas como constantes,
- $f(x,y,z)$ se integra con respecto a x.

Luego, se consideran los dos versiones diferentes para la integral (análogas a las del caso anterior), dependiendo de si D es una región plana de tipo I o de tipo II.

Se dice que una región sólida E es de **tipo 3** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x y z, es decir,

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xz y u_1 y u_2 son continuas sobre D.



Observaciones:

La frontera izquierda de E es la superficie con ecuación $y = u_1(x, z)$.

La frontera derecha de E es la superficie con ecuación $y = u_2(x, z)$.

Cuando E es una región de **tipo 3**, se puede demostrar que

$$\boxed{\iiint\limits_{E} f\,(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D} \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f\,(x,y,z)\,dy\right] dA}$$

En la integral interior de la derecha de esta ecuación debe entenderse que

- x y z se mantienen fijas,
- $u_1\,(x,z)$ y $u_2\,(x,z)$ son tratadas como constantes,
- $f\,(x,y,z)$ se integra con respecto a y.

Luego, como en los casos anteriores, se consideran dos versiones diferentes para la integral, dependiendo de si D es una región plana de tipo **I** o de tipo **II**.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Suponiendo que todas las integrales siguientes existen:

- $\iiint\limits_E (f+g)(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_E g(x,y,z)\,dV$
- $\iiint\limits_E kf(x,y,z)\,dV = k\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV$ para toda constante k.
- Si $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in E$, entonces
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV \geq \iiint\limits_E g(x,y,z)\,dV$$
- Si $E = E_1 \cup E_2$ donde E_1 y E_2 no se traslapan, excepto quizás en sus fronteras, entonces
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{E_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{E_2} f(x,y,z)\,dV$$
- $\iiint\limits_E 1dV = V(E)$
- Si $m \leq f(x,y,z) \leq M$ para todo $(x,y,z) \in E$, entonces
$$mV(E) \leq \iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV \leq MV(E)$$