Unidad 3
INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES EN REGIONES GENERALES

Bibliografía principal:

Cálculo de varias variables | Trascendentes tempranas (7a Edición)

Autor:

James Stewart

https://calculo2-unsl-1c2019.weebly.com

INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Como se aprende en *Cálculo en una variable*...

- Para integrales simples (definidas) la región sobre la que se integra es siempre un intervalo.

Ahora, si f es una función real de dos variables...

- Hemos visto que las integrales simples se pueden utilizar para calcular integrales dobles de f sobre rectángulos (*Teorema de Fubini*), ya que estos son regiones bidimensionales determinadas por dos intervalos.
- Sin embargo, muchas veces resulta útil o necesario integrar a f sobre regiones no rectangulares, por lo que a continuación abordaremos esta clase de integrales.

En este curso nos limitaremos a considerar regiones de integración siempre **acotadas**.

Definición (**integrales dobles sobre regiones generales**)

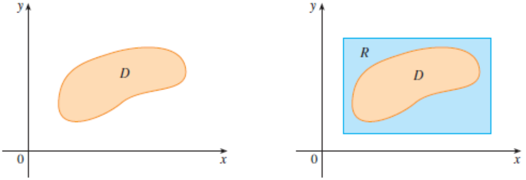
Si f es una función de dos variables y D es una región acotada contenida en dom $(f)^*$, la integral doble de f sobre D es

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA,$$

donde R es cualquier rectángulo que contiene a D y

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

siempre que F sea integrable sobre R.

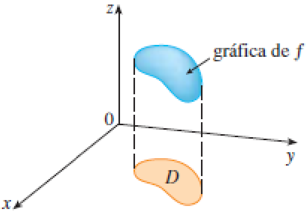


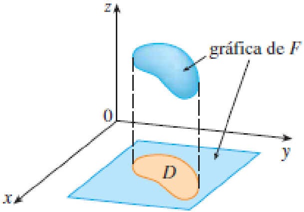
*O "casi" completamente contenida en *dom* (f)... (podría no estarlo, p.ej., en una cantidad finita de puntos o de curvas suaves).

En el caso en que

$$\boxed{f(x, y) \geq 0}$$

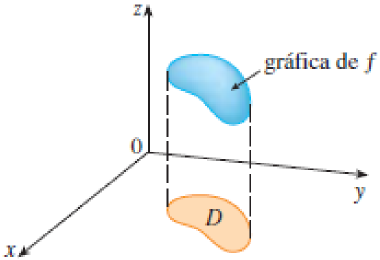
también se puede interpretar a $\iint_D f(x, y)\, dA$ como el **volumen** del sólido que está por encima de la región D y debajo de la superficie $z = f(x, y)$.

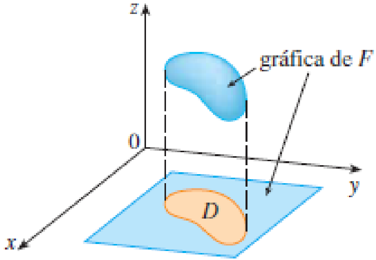




En efecto:

- (hemos visto que) $\iint_R F(x, y)\, dA$ da el volumen de la región encima de R y debajo de la gráfica de F (siendo $F \geq 0$ sobre R),
- (pero) por fuera de D este volumen es igual a 0, y sobre D la gráfica de F es idéntica a la gráfica de f.





Observación: Es probable que F tenga discontinuidades en los puntos frontera de D.

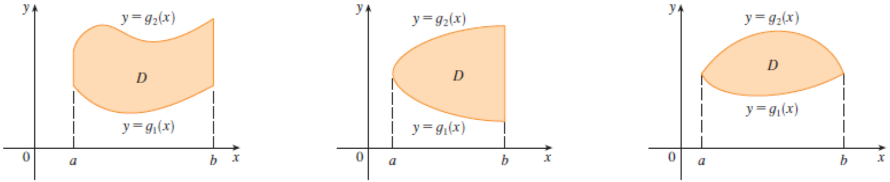
No obstante: Si f es continua sobre D y la curva frontera de D tiene un "buen comportamiento" (en un sentido fuera del alcance de este curso), se puede demostrar que $\iint_R F(x, y)\, dA$ existe y, por lo tanto, $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe.

A continuación, estudiaremos integrales dobles sobre dos tipos de regiones cuyas fronteras tienen este "buen comportamiento".

Se dice que una región plana (acotada) D es de **tipo I** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de x, variando x en un intervalo acotado de números reales; es decir,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

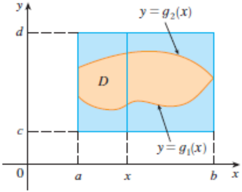
donde g_1 y g_2 son continuas sobre $[a, b]$.



Algunos ejemplos de regiones de tipo I

Para evaluar $\iint_D f(x,y)\,dA$ cuando D es una región de tipo I:

- Se elige un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ que contenga a D.



- Se considera la función $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$
- Entonces,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA \overset{\text{def.}}{=} \iint\limits_R F(x,y)\,dA \overset{\text{T. Fubini}}{=} \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dydx$$

- Pero $F(x,y) = 0$ si $c \leq y < g_1(x)$ o $g_2(x) < y \leq d$, y $F(x,y) = f(x,y)$ si $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, por lo tanto,

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

- Combinando estas igualdades se obtiene, en resumen, lo siguiente:

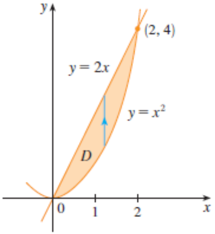
Si f es continua sobre una región de tipo I

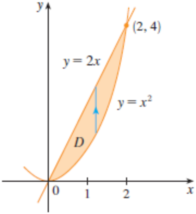
$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

EJEMPLO 2 (p.991): Calcular el volumen V del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.





Solución: Observando que D es una región de tipo I se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$$

Por lo tanto, el volumen sobre D y bajo $z = x^2 + y^2$ es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy dx$$

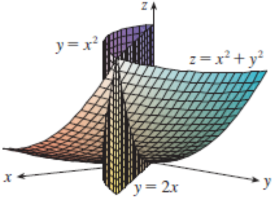
$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 2x + \tfrac{1}{3}(2x)^3 - \left(x^2 x^2 + \tfrac{1}{3}\left(x^2\right)^3\right)\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{14}{3} x^3 - x^4 - \tfrac{1}{3} x^6\right) dx$$

$$= \left[\tfrac{7}{6} x^4 - \tfrac{1}{5} x^5 - \tfrac{1}{21} x^7\right]_{x=0}^{x=2}$$

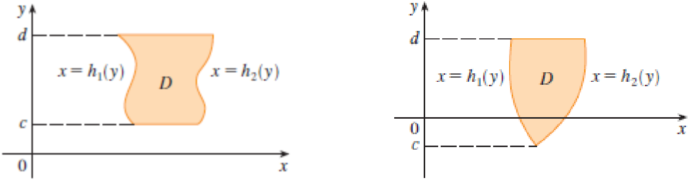
$$= \tfrac{7}{6} 2^4 - \tfrac{1}{5} 2^5 - \tfrac{1}{21} 2^7 = \ldots = \boxed{\tfrac{216}{35}} \approx 6.17 \quad \blacksquare$$



Se dice que una región plana (acotada) D es **tipo II** si está comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas de y, variando y en un intervalo acotado de números reales; es decir,

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas sobre $[c, d]$.



Algunos ejemplos de regiones de tipo II

Por un procedimiento análogo al realizado para regiones de tipo I, se obtiene el siguiente resultado para calcular integrales dobles sobre regiones de tipo II:

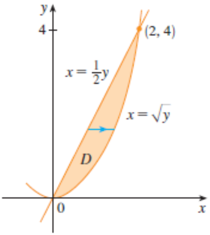
Si f es continua sobre una región de tipo II

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx dy$$

Reconsideremos el **EJEMPLO 2** (p.991)...



Observando que D es también una región de tipo II se puede escribir

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4,\ \tfrac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$$

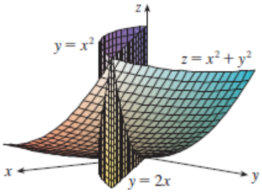
Así, el volumen sobre D y bajo $z = x^2 + y^2$ se puede calcular como sigue:

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

$$= \int_0^4 \left[\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x\right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_0^4 \left(\tfrac{1}{3}y^{3/2} + y^{5/2} - \tfrac{13}{24}y^3\right) dy$$

$$= \left[\tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4\right]_0^4 = \boxed{\tfrac{216}{35}} \approx 6.17 \ \blacksquare$$



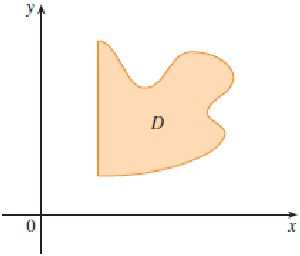
Recomendación: Antes de abordar la práctica correspondiente, leer los EJEMPLOS 1 (p.990), 3 (p.992), 4 (p.992) y 5 (p.993).

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

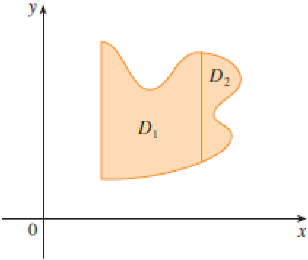
Suponiendo que todas las integrales siguientes existen:

1. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dA + \iint\limits_D g(x,y)\,dA$
2. $\iint\limits_D kf(x,y)\,dA = k\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ para toda constante k.
3. Si $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$, entonces
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA \geq \iint\limits_D g(x,y)\,dA$$
4. Si $D = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 no se traslapan, excepto quizás en sus fronteras, entonces
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dA$$
5. $\iint\limits_D 1dA = A(D)$
6. Si $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$, entonces
$$mA(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dA \leq MA(D)$$

La **propiedad 4** anterior es particularmente útil para evaluar integrales dobles sobre regiones planas acotadas que no son de tipo I ni de tipo II pero, sin embargo, pueden expresarse como una unión de dos regiones de alguna de estas clases (que no se traslapan, excepto quizás en sus bordes).



D **no es de tipo** I **ni de tipo** II



$D = D_1 \cup D_2$ **donde** D_1 **es de tipo** I **y** D_2 **es de tipo** II

Nota: La misma propiedad puede aplicarse (repetidamente) para calcular integrales dobles sobre cualquier unión finita (disjunta, salvo quizás en las fronteras) de regiones acotadas de tipo I y/o de tipo II.