PARCIAL 1 · 2024 (Tema I)

CÁLCULO II

(1) La superficie representada por $\boxed{z = x^2}$ es un cilindro parabólico

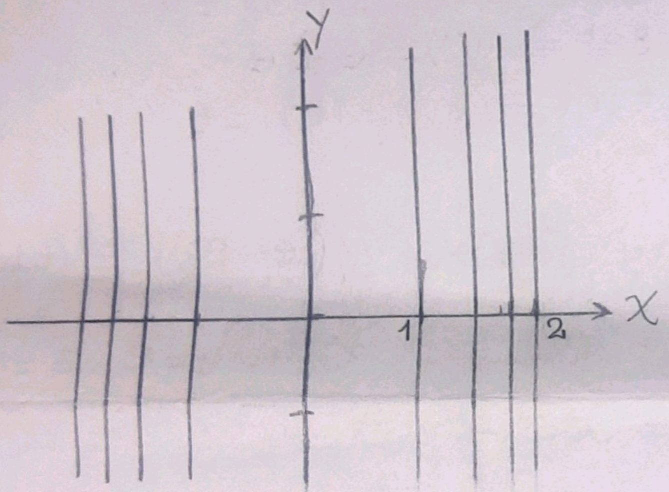
(1 pto.) Curvas de nivel: $f(x,y) = k$, $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$

- $x^2 = 0 \iff x = 0 \rightarrow$ 1 recta
- $x^2 = 1 \iff x = 1 \vee x = -1$
- $x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
- $x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$
- $x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2$

2 rectas

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7320$



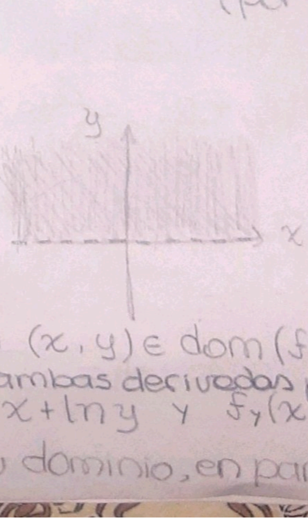
A medida que "nos alejamos" del eje y las curvas de nivel son "más cercanas" entre sí, lo que indica q' la superficie se vuelve "más empinada" (con mayor pendiente)

(2) $f(x,y) = \boxed{\dfrac{4x^2 - y^2}{6x - 3y}} = \dfrac{(2x)^2 - y^2}{6x - 3y} = \dfrac{\cancel{(2x-y)}(2x+y)}{3\cancel{(2x-y)}} = \dfrac{2x+y}{3}$

(1 pto.) a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+y}{3} = \dfrac{2.0+0}{3} = \dfrac{0}{3} = \boxed{0}$

(1 pto.) b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \overset{\text{def. } g}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) \overset{\text{item a)}}{=} 0 \overset{\text{def. } g}{=} g(0,0)$ $\therefore$ g es cont. en (0,0) (por def. de cont.)

(3) $f(x,y) = x^2 + x\ln y$



(0,5 p.) a) $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$

(0,5 p.) b) $\mathrm{Rg}(f) = \{z \in \mathbb{R} \,/\, z = f(x,y)$ p/ algún $(x,y) \in \mathrm{dom}(f)\}$

(0,5 p.) c) (2,1) es un punto interior al dominio de ambas derivadas parciales $f_x(x,y) = 2x + \ln y$ y $f_y(x,y) = \dfrac{x}{y}$ y estas son continuas en todos los puntos de su dominio, en particular, en (2,1)

③ d) La linealización de f en $(2,1)$ es:

0,5 ptos. $L(x,y) = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1)$

donde $f(2,1) = 2^2 + 2\underbrace{\ln 1}_{0} = \boxed{4}$, $f_x(2,1) = 2.2 + \underbrace{\ln 1}_{0} = 4$ y $f_y(2,1) = \frac{2}{1}$

Luego:

$$L(x,y) = 4 + 4(x-2) + 2(y-1) = 4 + 4x - 8 + 2y - 2 = \boxed{4x + 2y - 6}$$

y, dado que f es diferenciable en $(2,1)$:

$$f(2{,}01; 0{,}99) \approx L(2{,}01; 0{,}99) = 4.2{,}01 + 2.0{,}99 - 6 = 8{,}04 + 1{,}98 - 6$$
$$= \boxed{4{,}02}$$

1,5 ptos.
④ $u(x,y,z) = x^2 y^3 + z^4$ con $\begin{cases} x(t) = t + 3t^2 \Rightarrow x(1) = 1 + 3.1^2 = 4 \\ y(t) = te^t \Rightarrow y(1) = 1e^1 = e \\ z(t) = t\ln t \Rightarrow z(1) = 1\underbrace{\ln 1}_{0} = 0 \end{cases}$

$$u \begin{cases} x - t \\ y - t \\ z - t \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 2xy^3(1+6t) + 3x^2y^2(te^t + e^t) + 4z^3\left(t\frac{1}{t} + \ln t\right)$$

Luego, teniendo en cuenta que cuando $t=1$: $x=4$, $y=e$, $z=0$,

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = 8e^3.7 + 3.4^2.e^2(2e) + 0 = 56e^3 + 96e^3 = \boxed{152e^3} \approx 1239{,}54$$

0,5 ptos.
⑤ a) Dado un vector unitario $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$ en el punto $(a,b,c) \in Dom(f)$ es

$$D_{\vec{u}} f(a,b,c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2, c+hu_3) - f(a,b,c)}{h} \quad \text{si } \exists$$

1 pto.
b) $f(x,y,z) = ze^{xy}$

La dirección de máximo decrecimiento de f a partir del punto $(0,1,2)$ está dada por

$$-\nabla f(0,1,2) = -\left.\langle ze^{xy}y, ze^{xy}x, e^{xy} \rangle\right|_{(x,y,z)=(0,1,2)}$$
$$= -\langle 2e^{0.1}1, 2e^{0.1}0, e^{0.1} \rangle = -\langle 2,0,1 \rangle = \boxed{\langle -2, 0, -1 \rangle}$$

Y la razón de cambio en dicha dicha dirección es

$$-\|\nabla f(0,1,2)\| = -\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = -\sqrt{5} \approx \boxed{-2{,}236}$$

$(x,y) = y^2 - 4xy + x^3 + 4x$ $\qquad -\frac{16}{3} + 3\cdot\frac{4}{9} + 4 = -\frac{18}{3} + 4 = 0$

a) Búsqueda de extremos locales y/o puntos silla:

1 pto.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -4y + 3x^2 + 4 = 0 \iff -8x + 3x^2 + 4 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 4x = 0 \iff \cancel{2}y = \overset{2}{\cancel{4}}x \iff y = 2x \end{cases}$$

$x = 2$

$x = 2/3$

$x = 2 \Rightarrow y = 2.2 = 4$

$x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ Puntos críticos: $\boxed{(2,4) \text{ y } (2/3, 4/3)}$

Min $\qquad$ silla

Por otra parte:

$$\boxed{D(x,y) =} f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = 6x.2 - (-4)^2 = \boxed{12x - 16}$$

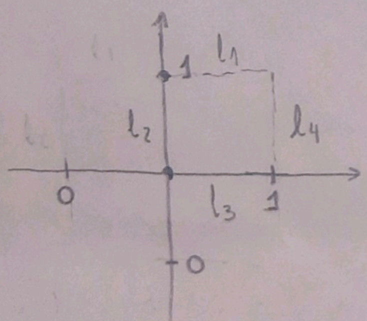
$$D(2,4) = 12.2 - 16 = 24 - 16 = 8 > 0 \;\wedge\; f_{xx}(2,4) = 6.2 = 12 > 0$$

$$D\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 12.\frac{2}{3} - 16 = \frac{\overset{8}{\cancel{24}}}{\cancel{3}} - 16 = -8 < 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ es punto silla}$$

$\therefore$ f en $(2,4)$ tiene un mínimo local.

1 pto. b) Búsqueda de extremos absolutos en $R = [0,1] \times [0,1]$

El único extremo local hallado en el ítem a) no pertenece a R, por lo que el trabajo se reduce a analizar la frontera de R:



$l_1: y = 1,\; 0 \le x \le 1$

$f(x,y) = f(x,1) = 1^2 - \cancel{4x} + x^3 + \cancel{4x} = 1 + x^3$

$f'(x,1) = 3x^2 = 0 \iff x = 0$

Punto $\boxed{(0,1) \in l_1}$

$l_2: x = 0,\; 0 \le y \le 1$

$f(0,y) = y^2$

$f'(0,y) = 2y = 0 \iff y = 0$

Punto $\boxed{(0,0) \in l_2}$

$f(0,1) = 1$

$f(0,0) = 0$ MIN ABS.

(*)

$l_3: y = 0,\; 0 \le x \le 1$

$f(x,0) = x^3 + 4x$

$f'(x,0) = 3x^2 + 4 = 0 \iff 3x^2 = -4 \rightarrow$ $\boxed{\text{no tiene sol. en } \mathbb{R}}$

$l_4: x = 1,\; 0 \le y \le 1$

$f(1,y) = y^2 - 4y + 5$

$f'(1,y) = 2y - 4 = 0 \iff 2y = 4 \iff y = 2$ Punto $\boxed{(1,2) \notin l_4}$

Y en los extremos de los intervalos

$f(1,0) = 5$ y $f(1,1) = 2$

MÁX ABS.