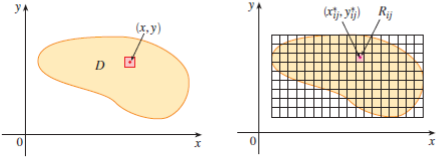
Aplicaciones de integrales dobles y triples

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Tenemos una lámina D cuya densidad es $\rho(x, y)$ (una función continua en D).
¿Cómo calculamos la masa total?



La masa se puede aproximar como

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \Delta A.$$

Masa total

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA.$$

Carga eléctrica

Si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por área unitaria) está dada por $\rho(x, y)$ en un punto (x, y) en D, entonces la carga total $\mathcal{Q}$ está dada por

$$\mathcal{Q} = \iint_D \rho(x, y)\, dA.$$

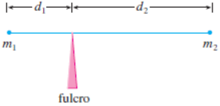
Versión 3 variables:

Si la densidad de carga es $\rho(x, y, z)$, su carga total es

$$\mathcal{Q} = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

Nuestro objetivo es encontrar el punto P sobre el que una placa delgada se mantiene horizontal.

El caso simple



El principio de Arquímides dice que $m_1 d_1 = m_2 d_2$. Luego

$$m_1(\overline{x} - x_1) = m_2(x_2 - \overline{x})$$

$$m_1(\overline{x} - x_1) = m_2(x_2 - \overline{x})$$

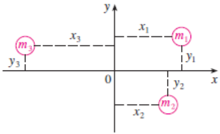
$$\overline{x}(m_1 + m_2) = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Si tenemos n partículas con masas $m_1, \cdot, m_n$, ubicados en $x_1, \cdot, x_n$, entonces

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Si tenemos n partículas con masas $m_1, \cdot, m_n$, ubicados en el plano xy, es decir $(x_1, y_1)\cdot, (x_n, y_n)$, entonces



Se define el momento con respecto al eje y

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Se define el momento con respecto al eje x

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i.$$

Luego, el centro de masa esta dado por

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}.$$

Si partimos la lámina en rectángulitos R_{ij}, el momento de R_{ij} con respecto al eje x se aproxima

$$\left(\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\right) y_{ij}^*.$$

Momento con respecto al eje x

$$M_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\right) y_{ij}^* = \iint_D y\rho(x,y)\, dA.$$

Análogamente, momento con respecto al eje y

$$M_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\right) x_{ij}^* = \iint_D x\rho(x,y)\, dA.$$

Centro de masa

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)\, dA \qquad \overline{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)\, dA.$$

Donde

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA.$$

Momentos respecto a los 3 planos coordenados

$$M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z)\, dV.$$

Centro de masa

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Donde

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV.$$

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a sus esfuerzos por girarlo.
Se define como mr^2 donde r es la distancia desde la partícula al eje.
Momento de inercia respecto al eje x

$$I_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\right) (y_{ij}^*)^2 = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Momento de inercia respecto al eje y

$$I_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A\right) (x_{ij}^*)^2 = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Momento de inercia respecto al origen o momento polar de inercia

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA.$$

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Suponga que se considera:

- La estatura de una mujer adulta elegida al azar.
- La duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria.

Tales cantidades se llaman variables aleatorias continuas.
Toda variable aleatoria continua X tiene una función de densidad de probabilidad f.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

La densidad f satisface :

- $f(x) \geq 0$ para todo x.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Sean X e Y dos variables aleatorias. Sea $f(x, y)$ su función de densidad conjunta, entonces

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA.$$

Las densidades conjuntas satisfacen:

- $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y).
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dA = 1$.

Si X es v.a con densidad $f_1(x)$ e Y es una v.a con densidad $f_2(y)$, si $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ decimos que X e Y son independientes.

Versión 3 variables

Sean X, Y e Z variables aleatorias. Sea $f(x, y, z)$ su función de densidad conjunta, entonces

$$P((x, y, z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV.$$

Las densidades conjuntas satisfacen:

- $f(x, y, z) \geq 0$ para todo (x, y, z).
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dV = 1$.

Ejemplo

El administrador de un cine determina que el tiempo promedio que los asistentes esperan en la fila para comprar un boleto para la película de esta semana es 10 minutos y el tiempo promedio que esperan para comprar palomitas es 5 minutos. Si se supone que los tiempos de espera son independientes, encuentre la probabilidad de que una persona espere un total de menos de 20 minutos antes de tomar su lugar.

Los tiempos de espera se modelan con la siguiente densidad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{\frac{-t}{\mu}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

X tiempo de espera para la compra de entrada.
Y tiempo de espera para la compra de golosinas.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{10} e^{\frac{-x}{10}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

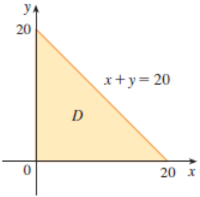
$$f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ \frac{1}{5} e^{\frac{-y}{5}} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Como X e Y son independientes

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} e^{\frac{-x}{10}} e^{\frac{-y}{5}} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{si no }. \end{cases}$$

$$P(X+Y<20)=\iint_D f(x,y)\,dA.$$

Donde D es



D la podemos describir de la siguiente manera

$$0<y<20-x, \qquad 0<x<20.$$

Ejercicio

Calcular

$$\int_0^{20}\int_0^{20-x} f(x,y)\,dydx.$$