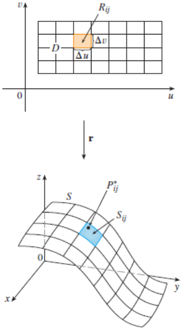
Integral de Superficie

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Supongamos que f es una función de tres variables en cuyo dominio se encuentra la superficie S. ¿ Cómo podemos definir la integral de superficie de f sobre S?



$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k} \qquad (u,v) \in D$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^{*})\Delta S_{ij}$$

Definimos la integral de superficie de f sobre la superficie S como

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\Delta S_{ij}.$$

Por otro lado

$$\Delta S_{ij} \approx \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u \Delta v$$

donde

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$

Luego

Definición

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\,dudv.$$

Ejemplo: Sean $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ y S la superficie descripta por

$$\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v) \qquad u \in [0,2\pi], v \in [0,h].$$

Calcular $\iint_S f(x,y,z)\, dS$.

$$\mathbf{r}_u = (-R\sin u, R\cos u, 0) \qquad \mathbf{r}_v = (0,0,1)$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos u, R\sin u, 0)$$

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{R^2\cos^2 u + R^2\sin^2 u} = R$$

y

$$f(R\cos u, R\sin u, v) = R^2\cos^2 u + R^2\sin^2 u = R^2$$

$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y,z)\, dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^h f(R\cos u, R\sin u, v)\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dvdu \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h R^3\, dvdu = R^3 2\pi h. \end{aligned}$$

Observación: Si $f = 1$ tenemos que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dudv = A(S).$$

Ejemplo: Sea la superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = u \qquad y = v \qquad z = g(u, v)$$

De una fórmula para

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS$$

Sabíamos que

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right)^2 + 1}$$

Entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS$$

$$= \iint_D f(u, v, g(u, v))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right)^2 + 1}\, dudv.$$

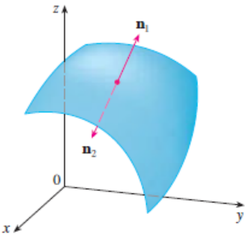
Observación: Si S es una superficie suave por tramos, es decir, una unión finita de superficies suaves $S_1, S_2, \cdots, S_n$, que corta sólo a lo largo de sus fronteras, entonces la integral de superficie de$f$ sobre S se define mediante

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x,y,z)\,dS.$$

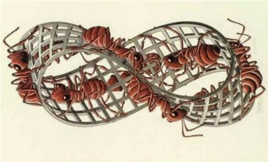
Aplicaciones: Las integrales de superficie tienen aplicaciones parecidas a las de las integrales que ya tratamos: masa, centro de masa y momento de inercia.
Ejemplo: Si una hoja delgada de aluminio tiene la forma de una superficie S y la densidad, masa por unidad de área, en el punto (x,y,z) es $\rho(x,y,z)$, entonces la masa total de la lámina es

$$\iint_S \rho(x,y,z)\,dS.$$

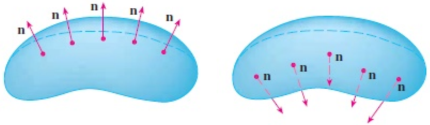
Superficies suceptibles de ser orientadas

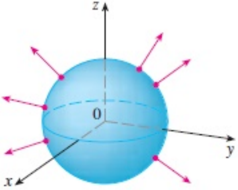


Superficies que no se pueden orientar

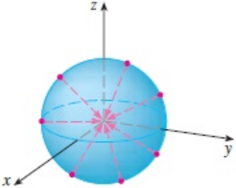


Si es posible elegir un vector unitario normal **n** en todos los puntos (x, y, z) de modo que **n** varíe continuamente sobre S, entonces se dice que S es una superficie orientada y la elección dada de **n** proporciona a S una orientación.





Orientación positiva



Orientación negativa

Si S es una superficie suave y orientable dada en la forma paramétrica por medio de una función vectorial $r(u, v)$, entonces automáticamente adquiere la orientación del vector unitario normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y la orientación opuesta se consigue con $-\mathbf{n}$.

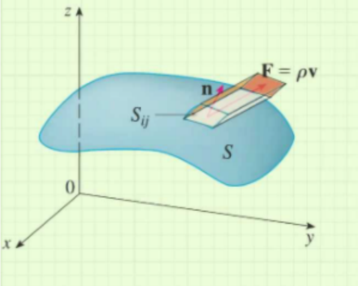
Ejemplo: Sea la superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = u \qquad y = v \qquad z = g(u, v)$$

Luego, su normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial g}{\partial v}(u, v), 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right)^2 + 1}}.$$

Sea $\rho(x, y, z)$ la densidad de un fluido.
Sea $v(x, y, z)$ su campo de velocidades.
El caudal es $\mathbf{F} = \rho v$.



La componente en la dirección normal es $\mathbf{F}.\mathbf{n} = \rho v.\mathbf{n}$
El flujo que atraviesa en la dirección de $\mathbf{n}$ por unidad de tiempo se puede aproximar

$$(\rho v.\mathbf{n})A(S_{ij}).$$

Luego

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho v.\mathbf{n}\, dS$$

Definición

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal $\mathbf{n}$, entonces la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S es

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina flujo de $\mathbf{F}$ a través de S.

Observación: Si S esta definida por $\mathbf{r}(u, v)$, entonces

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS \\
&= \iint_S \mathbf{F}.\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\, dS \\
&= \iint_D \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{v})).\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\right) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA \\
&= \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(\mathbf{u},\mathbf{v})).(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA.
\end{aligned}$$

Ejemplo: Sean $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ y S la superficie descripta por

$$\mathbf{r}(u,v)=(R\cos u, R\sin u, v) \qquad u\in[0,2\pi], v\in[0,h].$$

Calcular $\iint_S \mathbf{F}(x,y,z).\,d\mathbf{S}$.

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(R\cos u, R\sin u, 0)$$

y

$$\mathbf{F}(R\cos u, R\sin u, v)=(R\cos u, R\sin u, v)$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}(x,y,z).\,d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^h \mathbf{F}(R\cos u, R\sin u, v).(R\cos u, R\sin u, 0)\,dvdu\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h (R\cos u, R\sin u, v).(R\cos u, R\sin u, 0)\,dvdu\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^h R^2(\cos^2 u+\sin^2 u)\,dvdu = R^2 2\pi h.\end{aligned}$$

Ejemplo: Sea la superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = u \qquad y = v \qquad z = g(u, v)$$

Luego

$$\mathbf{F}.(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}).\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + 1\mathbf{k}\right)$$

Entonces

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iint_D -P\frac{\partial g}{\partial u} - Q\frac{\partial g}{\partial v} + R\, dA.$$

Observación: Esta fórmula toma la orientación hacia arriba de S, para tomar la orientación hacia abajo multiplicamos por -1.

Aplicaciones:

1. Si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico, entonces

$$\iint_S \mathbf{E}.\, d\mathbf{S}$$

es el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ a través de la superficie S

2. Supongamos que la temperatura en un punto (x, y, z) de un cuerpo es $u(x, y, z)$. Entonces el flujo de calor se define como el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\mathbf{K}\nabla u.$$

donde $\mathbf{K}$ expresa la conductividad.
Entonces

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iint_S -\mathbf{K}\nabla u.\, d\mathbf{S}$$

es el flujo de calor a través de la superficie S