Superficies paramétricas

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

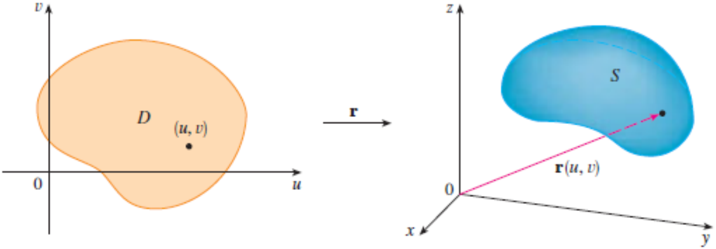
2021

Superficies paramétricas: Son superficies que podemos describir mediante una función vectorial definida sobre una región D del plano uv, es decir $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Luego

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \text{ con } (u, v) \in D\}$$



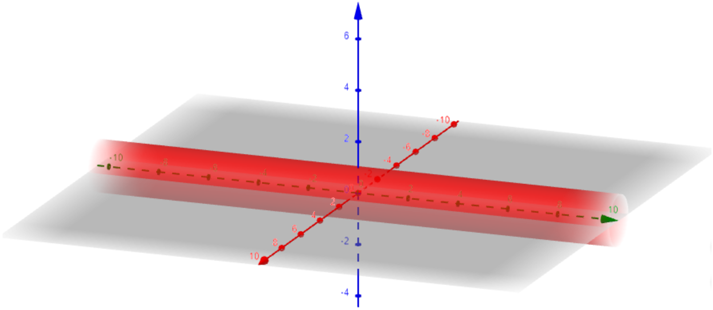
Ejemplo: Identifique y trace la superficie con ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sin u\mathbf{k} \qquad 0 \leq u \leq 2\pi \qquad -10 \leq v \leq 10$$

$$x = \cos u \qquad y = v \qquad z = \sin u$$

$$x^2 + z^2 = 1$$

Es el cilindro de radio 1 que abraza al eje y



Ejemplo: Determine una representación paramétrica de la esfera unitaria

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Recordar que el volumen encerrado por la esfera unitaria se parametrizaba así

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\phi$$

$$0 \leq \rho \leq 1 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Para parametrizar la cáscara tomo $\rho = 1$, luego

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \sin\phi \cos\theta \mathbf{i} + \sin\phi \sin\theta \mathbf{j} + \cos\phi \mathbf{k} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Ejemplo: Encuentre una representación paramétrica de la superficie $z = f(x, y)$

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \qquad (u, v) \in D.$$

Comentario: Ojo!!, NO todas las las superficies son gráficos de funciones.

Ejemplo de aplicación: Encuentre una representación paramétrica de la superficie $z = x^2 + y^2$

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \qquad (u, v) \in D.$$

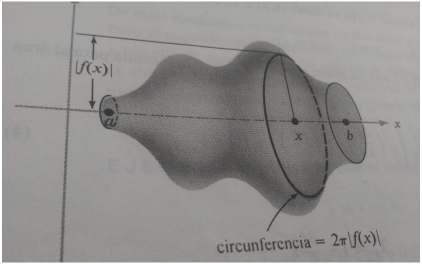
Ejercicio: Muestre que la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2) \qquad (u, v) \in D.$$

describe la superficie $z = x^2 + y^2$.

Conclusión: Las parametrizaciones de las superficies no son únicas.

Consideremos la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geq 0$.

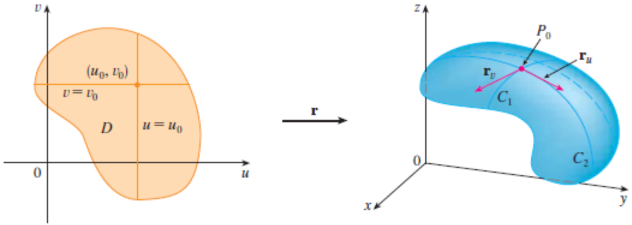


¿Cómo podemos parametrizarla?

$$x = u \qquad y = f(u)\cos\theta \qquad z = f(u)\sin\theta \qquad a \leq u \leq b \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Sea S una superficie paramétrica, ¿Cómo podemos calcular el plano tangente en un punto? Supongamos que su parametrización es:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$



$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

Decimos que la superficie es suave (no tiene esquinas) si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$
El plano tangente tiene como normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$.

Definición (Plano tangente a superficies paramétricas)

Si una superficie con parametrización $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es suave en $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, es decir $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0).
Definimos el plano tangente a la superficie en $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ como el plano determinado por los vectores $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$. Así $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal , y una ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie esta dada por

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0).\mathbf{n}(u_0, v_0) = 0.$$

Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ entonces la fórmula se convierte en

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

Ejemplo: Supóngase que una superficie S es la gráfica de una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Mostrar que la superficie es suave en todos los puntos $(u_0, v_0, g(u_0, v_0)) \in \mathbb{R}^3$.
Escribimos S de forma paramétrica

$$x = u \qquad y = v \qquad z = g(u, v)$$

Entonces

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0), -\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0), 1 \right) \neq \mathbf{0}$$

¿ Cómo es el plano tangente?

$$(x-u_0, y-v_0, z-g(u_0,v_0)).\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0), -\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0), 1\right) = 0$$

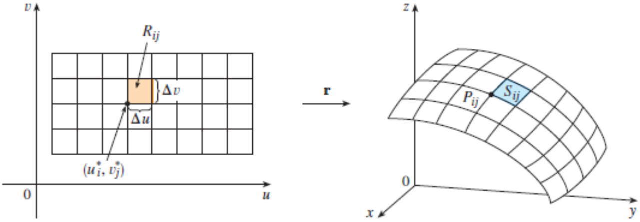
$$(x-u_0)\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0)\right) + (y-v_0)\left(-\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)\right) + (z-g(u_0,v_0)) = 0$$

$$z = g(u_0,v_0) + (x-u_0)\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) + (y-v_0)\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0)$$

Observación:

La definición de plano tangente para superficies parametrizadas coincide con la definición que vimos para planos tangentes a gráficas de funciones.

¿ Cómo se calcula el área?



Sean

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

$$A(S_{ij}) \approx \|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)\| = \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v$$

$$A(S) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*\| \Delta u \Delta v$$

Definición

Si una superficie paramétrica suave S está dada por la ecuación y S es cubierta sólo una vez cuando (u, v) varía en todo el dominio del parámetro D, entonces el área de la superficie de S es

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv.$$

Ejemplo: Sea S una superficie que es la gráfica de una función diferenciable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Calcular el área de S.Ya vimos que

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial g}{\partial v}(u, v), 1\right)$$

Luego

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dudv = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right)^2 + 1} \, dudv$$

Ejemplo: Consideremos la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geq 0$ y f' es continua.Recordemos su parametrización

$$x = u \qquad y = f(u)\cos\theta \qquad z = f(u)\sin\theta \qquad a \leq u \leq b \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(u)\cos\theta & f'(u)\sin\theta \\ 0 & -f(u)\sin\theta & f(u)\cos\theta \end{vmatrix} = (f(u)f'(u), -f(u)\cos\theta, -f(u)\sin\theta)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta\| &= \|(f(u)f'(u), -f(u)\cos\theta, -f(u)\sin\theta)\| \\ &= \sqrt{(f(u)f'(u))^2 + (f(u)\cos\theta)^2 + (f(u)\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{(f(u)f'(u))^2 + (f(u))^2} = f(u)\sqrt{1 + (f'(u))^2} \end{aligned}$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b f(u)\sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du d\theta = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du.$$