Divergencia y Teorema de Gauss

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Definición

Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ entonces la divergencia de $\mathbf{F}$ es la función de tres variables definida por:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Para recordar...

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla.\mathbf{F}$$

Ejemplo: Sea $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^3 x)\mathbf{j} + (z^4 + yx)\mathbf{k}$, calcular $\operatorname{div}\mathbf{F}$.

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^4 + yx) = 2x + 3y^2 x + 4z^3.$$

Teorema

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0.$$

Demostración:

Recordemos que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Luego

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial R^2}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

¿ Existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{G}$ para $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^3 x)\mathbf{j} + (z^4 + yx)\mathbf{k}$?
Supongamos que exista G entonces

$$\mathrm{div}\, \mathbf{F} = \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\mathbf{F} = 0$$

Pero

$$\mathrm{div}\, \mathbf{F} = 2x + 3y^2 x + 4z^3 \neq 0.$$

Luego, podemos concluir que no existe $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{G}$.

Comentario

Se define el Laplaciano de la siguiente forma:

$$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u).$$

Este operador aparece en muchas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Ejercicio

Sean f, g dos funciones con derivadas segundas continuas definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que $\Delta f = \Delta g = 0$ en U.

Sea $\mathcal{C}$ una curva en el plano parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad a \leq t \leq b.$$

Su vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|r'(t)|}\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|r'(t)|}\mathbf{j}$$

Su vector normal unitario es:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|r'(t)|}\mathbf{i} + \frac{-x'(t)}{|r'(t)|}\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\mathbf{n}ds &= \int_a^b (\mathbf{F}.\mathbf{n})(t)|r'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \left(P(x(t), y(t))\frac{y'(t)}{|r'(t)|} - Q(x(t), y(t))\frac{x'(t)}{|r'(t)|} \right) |r'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)\, dt \\
&= \int_{\mathcal{C}} P\, dy - Q\, dx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, dA = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA.
\end{aligned}$$

Segunda forma vectorial del Teorema de Green

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\mathbf{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

Teorema de la Divergencia (Gauss)

Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, dada con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F}. \, d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

Considere $\mathbf{F} = (2x, y^2, z^2)$, sea S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada positivamente. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S}$.
¿Vale el Teorema de Gauss?
¿Sea E una región sólida simple?✓
¿ Su frontera esta orientada positivamente?✓
¿$\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas?✓
Entonces podemos aplicar el Teorema de Gauss

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV.$$

Calculemos la divergencia de $\mathbf{F}$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 + 2y + 2z$$

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iiint_E 2 + 2y + 2z\, dV \\ &= \iiint_E 2\, dV + \iiint_E 2y\, dV + \iiint_E 2z\, dV \end{aligned}$$

$$\iiint_E 2\, dV = 2V(E) = 2\frac{4}{3}\pi.$$

$$\begin{aligned}\iiint_E 2y\, dV &= \iint_D \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} 2y\, dydA \\ &= \iint_D y^2\Big|_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} = \iint_D 0\, dA = 0\end{aligned}$$

Ejercicio: Mostrar que $\iiint_E 2z\, dV = 0$.

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \frac{8}{3}\pi.$$

Demostración

Recordando que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, tenemos que

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Por otro lado

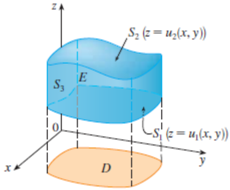
$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, dS &= \iint_S (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}).\mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_S P\mathbf{i}.\mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\mathbf{j}.\mathbf{n}\, dS + \iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS\end{aligned}$$

Alcanza con probar que

- $\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV = \iint_S P\mathbf{i}.\mathbf{n}\, dS.$
- $\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV = \iint_S Q\mathbf{j}.\mathbf{n}\, dS.$
- $\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS.$

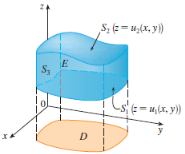
Vamos a probar que $\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS$.
Vamos a suponer que E región del tipo 1, es decir

$$E = \{(x,y,z) \colon (x,y) \in D \quad f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}$$



$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dzdA$$

$$= \iint_D \left(R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\right) dA$$



Por otro lado

$$\iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_1\, dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_2\, dS + \sum_{i=3}^{6} \iint_{S_i} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_i\, dS$$

Observar que la normal $\mathbf{n}_i$ para $i = 3, \cdots, 6$ es perpendicular a $\mathbf{k}$, es decir $\mathbf{k}.\mathbf{n} = 0$

$$\iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_1\, dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_2\, dS.$$

Calculemos la integral sobre S_1

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

$$\mathbf{n}_1.\mathbf{k} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_1 \, dS$$

$$= \iint_D R(x, y, f_1(x, y)) \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA$$

$$= -\iint_D R(x, y, f_1(x, y)) \, dA.$$

Calculemos la integral sobre S_2

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\left(\frac{-\partial f_2}{\partial x}, \frac{-\partial f_2}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

$$\mathbf{n}_2.\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k}.\mathbf{n}_2 \, dS$$

$$= \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}} \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA$$

$$= \iint_D R(x, y, f_2(x, y)) \, dA.$$

$$\iint_S R\mathbf{k}.\mathbf{n}\, dS = \iint_D R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\, dA = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Ejercicio: Probar

- $\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV = \iint_S P\mathbf{i}.\mathbf{n}\, dS.$
- $\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV = \iint_S Q\mathbf{j}.\mathbf{n}\, dS.$