Rotacional y Teorema de Stokes

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Repaso

Definición

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo de $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R. Entonces se define el rotacional como:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para recordar...

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular el rotor del campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2).$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 - 2yz & 2xz - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y - 2y)\mathbf{i} - (2z - 2z)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = (0,0,0)$$

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D donde P, Q y R tienen derivadas continuas de primer orden. Entonces

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

en toda la región D si y sólo si $\mathbf{F}$ es conservativo.

Observación: Si es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} \\
&= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Observación: Sean $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas y D una región donde se aplica el Teo de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, 0)$ calculemos su rotor.

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

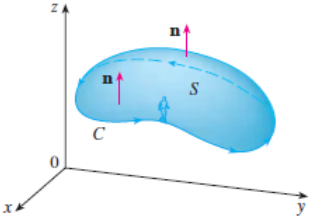
$$\mathrm{rot}\mathbf{F}.\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

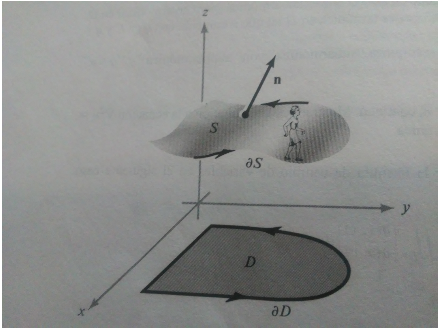
Comentario

Podemos reescribir la ecuación del Teo de Green de la siguiente forma:

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \iint_D \mathrm{rot}\mathbf{F}.\mathbf{k}\, dA.$$

Motivación Stokes



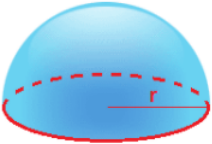


Teorema

Sea S una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva $\mathcal{C}$ suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea **F** un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \iint_S rot\mathbf{F}.d\mathbf{S}.$$

Ejemplo: Verificar el Teo. de Stokes para $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z \geq 0$ y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.



¿Es una superficie suave por tramos y orientada que está acotada por una curva $\mathcal{C}$ suave por tramos, simple y cerrada con orientación positiva? $\checkmark$
¿Las componentes del campo vectorial tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S? $\checkmark$

Calculemos el rotor

$$\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

Luego

$$\iint_S rot\mathbf{F}.d\mathbf{S} = 0.$$

Calulemos $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r}$

Parametrizamos la curva, calculamos su derivada y componemos con el campo

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\mathbf{F}(\cos t, \sin t, 0) = (\cos t, \sin t, 0)$$

Luego

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0)(-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

Ejemplo: Sea $\mathbf{F} = (ye^z, xe^z, xye^z)$ mostrar que $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple $\mathcal{C}$ recorrida positivamente que es la frontera de una superficie S es 0.
¿vale el Teo de Stokes?✓

$$\text{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix}$$

$$= (xe^z - xe^z)\mathbf{i} - (ye^z - ye^z)\mathbf{j} + (e^z - e^z)\mathbf{k} = (0, 0, 0)$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \iint_S rot\mathbf{F}.d\mathbf{S} = 0$$

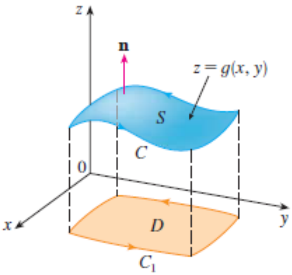
Ejercicio: Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D donde P, Q y R tienen derivadas continuas de primer orden. Mostrar que si

$$\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

en toda la región D entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Demostración de Teorema de Stokes Lo vamos a demostrar para superficies que son gráficas de funciones. Es decir, para el caso en que la superficie S tiene ecuación $z = g(x, y)$ con las siguientes ecuaciones paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y).$$



Empecemos calculando $\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\, d\mathbf{S}$. Recordemos que

$$\iint_S \mathbf{F}.\, d\mathbf{S} = \iint_D -P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\, dA.$$

y

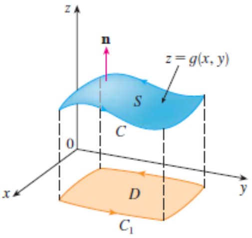
$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}.\, d\mathbf{S} &= \iint_D -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dA \\ &= \iint_D -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dA\end{aligned}$$

Ahora tenemos que calcular

$$\int_{C} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r}$$



Parametrizamos la curva

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z(t) = g(x(t), y(t)) \qquad a \leq t \leq b$$

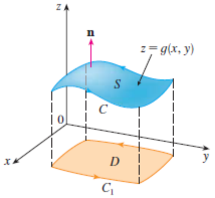
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} \right) \, dt$$

Por regla de la cadena

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} &= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] \, dt \\ &= \int_{\partial D} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \end{aligned}$$



Podemos aplicar el Teo de Green y usar regla de la cadena recordando que P, Q y R dependen de x, y, z y que z depende de x e y.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.\, d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right] dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) dA$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dA$$

$$= \iint_D -\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}.\, d\mathbf{S}.$$