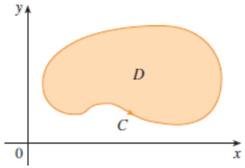
Teorema de Green

Analía Silva

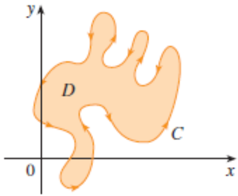
Universidad Nacional de San Luis

2021

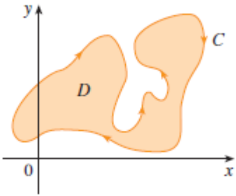
Motivación



Orientación



a) Orientación positiva



b) Orientación negativa

Recordar:

La orientación positiva es en contra de las agujas del reloj.
La región *D* queda a la izquierda cuando recorremos la curva.

Teorema de Green

Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada, suave por tramos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita $\mathcal{C}$. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Comentario

Se pueden utilizar cualquiera de las siguientes notaciones:

$$\int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy,$$

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy.$$

Ejemplo: Usar el Teorema de Green para evaluar $\int_{\mathcal{C}^+}(y^2+x^3)\,dx+(x+1)^2\,dy$ donde $\mathcal{C}^+$ es el perimetro del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en dirección contraria a la que giran las agujas del reloj.

$$P(x,y)=y^2+x^3 \qquad Q(x,y)=(x+1)^2$$

P y Q tienen derivadas parciales continuas? ✓
La curva es cerrada y simple y orientada positivamente?✓.
Luego, podemos aplicar Green

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}^+}(y^2+x^3)\,dx+(x+1)^2\,dy &= \iint_D\left(\frac{\partial(x+1)^2}{\partial x}-\frac{\partial(y^2+x^3)}{\partial y}\right)\,dA\\
&= \int_0^1\int_0^1 2(x+1)-2y\,dxdy\\
&= \int_0^1 x^2+2x-2yx\Big|_0^1\,dy\\
&= \int_0^1 3-2y\,dy = 3y-y^2\Big|_0^1 = 2
\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada simple que acota una región para la cuál se aplica el Teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $\mathcal{C} = \partial D$ es

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

Tomamos

$$P(x,y) = -y \qquad Q(x,y) = x$$

P y Q tienen derivadas parciales continuas? ✓
Podemos aplicar Green

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dA \\ &= \frac{1}{2}\iint_D [1+1]\,dxdy = \iint_D dxdy = A\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular el área del disco de centro $(0,0)$ y de radio R.

$$\sigma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R\cos\theta)(R\cos\theta) - R\sin\theta(-R\sin\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,d\theta = \frac{1}{2}R^2\theta\Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.
\end{aligned}$$

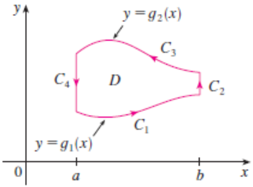
Demostración
(Lo vamos a demostrar para regiones de tipo I)
Alcanza con ver que

1. $$\int_{\mathcal{C}} P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA.$$

2. $$\int_{\mathcal{C}} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$

Observemos que juntando 1 y 2 demostramos el Teorema.Demostremos 1,
$D := \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ donde g_1 y g_2 son funciones continuas.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dydx \\ &= \int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))dx.\end{aligned}$$



A $\mathcal{C}_1$ la parametizamos como $\sigma_1(x) = (x, g_1(x)) \qquad a \leq x \leq b$

$$\int_{\mathcal{C}_1} Pdx = \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx.$$

En vez de parametrizar $\mathcal{C}_3$, nos conviene parametrizar $-\mathcal{C}_3$. A $-\mathcal{C}_3$ la parametrizamos como $\sigma_3(x) = (x, g_2(x)) \qquad a \leq x \leq b$

$$\int_{\mathcal{C}_3} Pdx = -\int_{-\mathcal{C}_3} Pdx = \int_a^b -P(x, g_2(x))\, dx.$$

Para parametrizar $\mathcal{C}_2$ tenemos $\sigma_2(t) = (b, t) \qquad g_1(b) \leq t \leq g_2(b)$ luego $dx = 0$. Analogamente, sobre $\mathcal{C}_4$ tenemos $dx = 0$.

$$\int_{\mathcal{C}_2} Pdx = 0 = \int_{\mathcal{C}_4} Pdx.$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} Pdx &= \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + \int_{\mathcal{C}_3} Pdx + \int_{\mathcal{C}_4} Pdx \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} Pdx + \int_{\mathcal{C}_3} Pdx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x))\, dx.\end{aligned}$$

y recordando

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = \int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x)) dx.$$

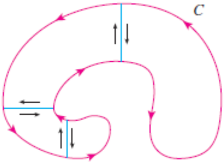
Concluimos que

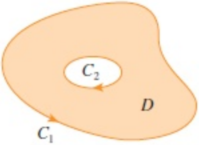
$$\int_{\mathcal{C}} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dA$$

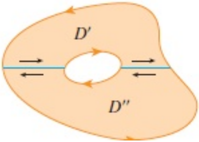
Ejercicio: Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dA.$$

Dominios más generales







Teorema

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D. Supongamos que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en toda la región D. Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Demostración

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} . d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0$$

Luego $\mathbf{F}$ es conservativo.