Teorema fundamental de integrales de línea

Analía Silva

Universidad Nacional de San Luis

2021

Teorema fundamental del cálculo dice

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde F' es continua en $[a, b]$

Teorema

Sea $\mathcal{C}$ una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Sea f la función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo sobre $\mathcal{C}$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f . d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Definición

Si un campo $\mathbf{F} = \nabla f$ decimos que $\mathbf{F}$ es conservativo.
A la función f se la llama potencial.

Demostración

Sea $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

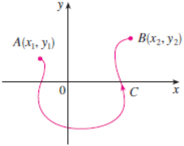
$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \nabla f . d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)).\mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\, dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \\
&= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))
\end{aligned}$$

Observación

Lo demostramos para el caso de curvas suaves pero también vale para curvas suaves a trozos.

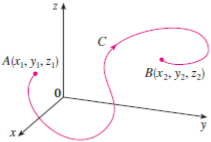
Observación Si f es una función de dos variables y $\mathcal{C}$ una curva en el plano, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f . d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$



Si f es una función de tres variables y $\mathcal{C}$ una curva en el espacio, entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla f . d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1).$$



Observaciones:

1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos curvas que empiezan y terminan en el mismo lugar entonces
$$\int_{\mathcal{C}_1} \nabla f.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \nabla f.d\mathbf{r}$$
Cuando ∇f es continuo.
2. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo. Se dice que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si para cualquier par de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ que empiezan y terminan en el mismo lugar entonces
$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$
3. La integrales de línea de los campos conservativos son independientes de la trayectoria.

Ejercicio: Sea $\mathbf{F}(x,y) = (2x, 2y)$.

1. Mostrar que $f(x,y) = x^2 + y^2$ es un potencial de $\mathbf{F}$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y) = \mathbf{F}$$

Observación: $f(x,y) = x^2 + y^2 + C$ también satisface que $\nabla f = \mathbf{F}$.

2. Sea $\mathcal{C}$ definida por $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ con $0 \leq t \leq \pi$. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}.$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla f.d\mathbf{r} &= f(\mathbf{r}(\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) \\ &= f(0, -e^{-\pi}) - f(0,1) = e^{-2\pi} - 1\end{aligned}$$

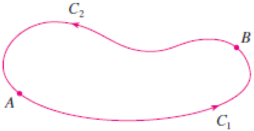
donde

$$\mathbf{r}(0) = (0,1) \qquad \mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{-\pi})$$

$$f(0, -e^{-\pi}) = (-e^{-\pi})^2 = e^{-2\pi} \qquad f(0,1) = 1$$

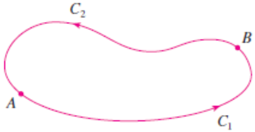
¿ Qué pasa con las curvas cerradas?

Ejercicio: Si $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria y $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, calcular $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$



$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_{-\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$$

Si sabemos que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$ sobre cualquier curva cerrada,¿Qué podemos decir sobre la independencia de la trayectoria?
Tengo $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos trayectorias que empiezan en A y terminan en B y me construyo la curva cerrada $\mathcal{C}_1$ seguida de $-\mathcal{C}_2$.



$$0 = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{-\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

Luego

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}.$$

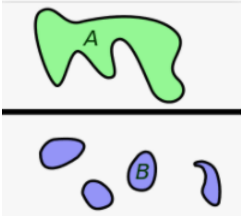
Conclusión

Teorema

$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada.

Sabemos que si $\mathbf{F} = \nabla f$ sabemos que $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. ¿Hay otros campos vectoriales continuos qué verifiquen esto?

Respuesta: Si estamos en una región conexa abierta podemos afirmar que NO



Teorema

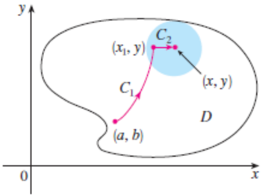
Supongamos que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial que es continuo sobre una región conexa abierta D. Si es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo sobre D, es decir, existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Demostración caso $\mathbb{R}^2$

Sea (a, b) un punto fijo de D. Construimos el potencial

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

como $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria puedo tomar cualquier camino para unir (x, y) con (a, b). En particular elijo el del dibujo



$$f(x, y) = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F}.d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

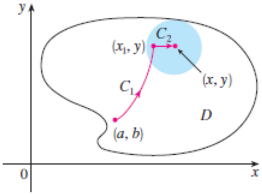
Derivamos respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

Si escribimos $\mathbf{F} = (P, Q)$ entonces $\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy$. Luego

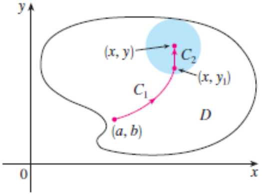
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy$$



Como sobre $\mathcal{C}_2$ y es constante, $dy = 0$ ($\mathbf{r}(t) = (t, y)$ con $x_1 \le t \le x$)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} P(t,y)dt = P(x,y)$$

Análogamente,



$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} Pdx + Qdy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x,t)dt = Q(x,y)$$

Finalmente

$$\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right) = \nabla f.$$

¿ Cómo podemos identificar los campos conservativos en $\mathbb{R}^2$? Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo conservativo con derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces como existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema

Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden sobre un dominio D, entonces en la totalidad de D tenemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

¿Hay una vuelta de este resultado? Respuesta: En dominios simplemente conexos podemos afirmar que si

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D. Supongamos que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en toda la región D. Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

Conclusión

Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D donde P y Q tienen derivadas continuas de primer orden . Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en toda la región D si y sólo si $\mathbf{F}$ es conservativo.

Ejemplo: Decidir si el campo $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y + x)$ es conservativo. Aplicamos el Teorema

$$P(x, y) = xy \qquad Q(x, y) = y + x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \qquad \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Luego No es conservativo.

Ejercicio: Decidir si el campo $\mathbf{F}(x, y) = (1, 2y)$ es conservativo.
Aplicamos el Teorema $P(x, y) = 1 \qquad Q(x, y) = 2y$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Luego es conservativo.
¿Podremos encontrar su potencial? Buscamos f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$

$$P(x, y) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Q(x, y) = 2y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Puedo buscar la f integrando...

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int 1\, dx = x + g(y)$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) \qquad$ pero también $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$
Entonces $g'(y) = 2y \qquad$ integrando... $g(y) = y^2 + C$
Finalmente $f(x, y) = x + y^2 + C$. Ejercicio: Verificar que $\mathbf{F} = \nabla f$.

Considerar el campo dado por

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Demostrar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$P_y = \frac{(-1)(x^2+y^2)+y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x = \frac{1.(x^2+y^2)-x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

¿Alcanza esto para concluir que **F** es un campo gradiente? ¿Por qué?

NO, P y Q estan definidos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que no es simplemente conexo.

Ejercicio: Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unidad. Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}.d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Concluir a partir de lo anterior que el campo **F** no es un campo gradiente.

¿ Qué pasa en $\mathbb{R}^3$?

Definición

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo de $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R. Entonces se define el rotacional como:

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Para recordar...

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Teorema

Sea $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial sobre una región simplemente conexa D donde P, Q y R tienen derivadas continuas de primer orden. Entonces

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

en toda la región D si y sólo si $\mathbf{F}$ es conservativo.

Ejercicio: Decidir si el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

es conservativo.
Calculemos su rotor

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & x^2 - 2yz & 2xz - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y - 2y)\mathbf{i} - (2z - 2z)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = (0, 0, 0)$$

Luego, es conservativo. Ejercicio: Hallar su potencial.